

Серия 15. Перестановки, продолжение

1. Из Сочи в Москву поочерёдно выходят путники, на каждом из которых сидит своя муха. Все путники идут с постоянными различными скоростями; для любой пары путников известно, что более медленный из них вышел из Сочи раньше, но пришёл в Москву позже. Когда два путника встречаются, мухи на них меняются местами (никакие три путника не встречаются вместе одновременно). Докажите, что какая-то муха побывает на всех путниках.
2. В библиотеке n журналов размещены на k непустых полках ($n \geq k$). На каждой полке первый журнал был переставлен за последний журнал этой же полки. Библиотекарь за одну операцию меняет местами два произвольных журнала (возможно на разных полках). Какое наименьшее число операций потребуется библиотекарю для расстановки журналов в исходном порядке?
3. Барон Мюнхгаузен утверждает, что придумал такую комбинацию вращений кубика рубика, что из любого состояния кубика можно перейти в собранное, повторив эту комбинацию достаточное число раз. Не привирает ли барон?
4. Докажите, что число состояний кубика Рубика не кратно 13 (положения центральных квадратов граней остаются постоянными при операциях).
5. Дано натуральное число n вида $4k + 3$, где k — целое неотрицательное. Сколько существует способов выписать числа $1, 2, \dots, n$ в некотором порядке так, чтобы число инверсий в полученной последовательности было кратно $2n$?
6. Докажите, что не существует функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, при всех $x \in \mathbb{R}$ удовлетворяющей условию $f(f(x)) = x^2 - 2$.