

Разной "Существует ли?"

1. Существует ли многочлен (с вещественными коэффициентами) степени 2019, удовлетворяющий равенству $P(x) + P(1 - x) = 1$?
2. Существует ли выпуклая фигура, которой нельзя покрыть полукруг, но двумя копиями которой можно покрыть весь круг?
3. Назовем красными числа вида $\sqrt{a + b\sqrt{2}}$, где a и b – ненулевые целые числа. Назовем зелеными числа вида $\sqrt{c + d\sqrt{7}}$, где c и d – ненулевые целые числа. Может ли зелёное число равняться сумме нескольких красных?
4. На лугу, имеющем форму квадрата, имеется круглая лунка. По лугу прыгает точечный кузнечик. Перед каждым прыжком он выбирает вершину и прыгает по направлению к ней. Длина прыжка равна половине расстояния до этой вершины. Всегда ли кузнечик сможет попасть в лунку?
5. Существует ли такая возрастающая последовательность $\{a_n\}$ из натуральных чисел, что для любых i, j любой простой делитель суммы $a_i + a_j$ меньше миллиона?
6. Во время ремонта галереи барон Мюнхгаузен заказал плотнику тонкий плинтус длиной 1 м, на котором черные куски чередовались с белыми, причем суммарные длины черных и белых отрезков были равны. Плотник по ошибке изготовил плинтус длиной 0.5 м (и его раскраска отличалась от правильной тоже сжатием в два раза). Чтобы исправить свою ошибку, он сделал еще один очно такой же плинтус и установил два коротких плинтуса вместо одного. Позже барон рассказывал друзьям, что для получения изначально заказанного узора ему пришлось перекрасить всего лишь несколько отрезков суммарной длиной не более 1 см. Возможно ли это?