

## Разной неравенства

1. **Беларусь 2011.** Положительные числа  $a, b, c$  таковы, что  $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ . Докажите, что

$$a + b + c \geq ab + bc + ca.$$

2. Пусть  $x \geq y \geq z \geq 0$ , а  $a \geq b \geq c$  — вещественные числа. Докажите, что

$$x(a-b)(a-c) + y(b-c)(b-a) + z(c-a)(c-b) \geq 0.$$

Докажите также, что это останется верным, если  $0 \leq x \leq y \leq z$ .

3. Для вещественных чисел  $a, b, c$  докажите неравенство

$$a^4 + b^4 + c^4 + abc(a + b + c) \geq ab(a^2 + b^2) + bc(b^2 + c^2) + ca(c^2 + a^2).$$

4. **IMO 2000.** Для положительных  $a, b, c$  выполнено, что  $abc = 1$ . Докажите неравенство:

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right) \left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) \left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

5. **Беларусь.** Пусть  $m, n$  — натуральные числа. Докажите неравенство:

$$2 \left| \sqrt{2m} - \sqrt{5n} \right| > \frac{5}{2m + 3n}.$$

6. Даны положительные числа  $a, b, c$ . Докажите неравенство:

$$\sqrt{a + \sqrt[3]{b + \sqrt[4]{c}}} \geq \sqrt[32]{abc}.$$

7. Разложите выражения  $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$  и  $(x^2y + y^2z + z^2x) - (xy^2 + yz^2 + zx^2)$  на множители. Какие условия на числа  $x, y, z$  необходимы и достаточны, чтобы эти выражения были положительны?

8. **Вьетнам.** Про вещественные числа  $x, y, z$  известно, что  $x \geq y \geq z \geq 0$ . Докажите неравенство

$$x^3y^2 + y^3z^2 + z^3x^2 \geq xyz(x^2 + y^2 + z^2).$$