

Серия 20. Ориентированные графы

1. В стране каждые два города соединены дорогой с односторонним движением. Докажите, что существует город, из которого можно проехать в любой другой не более чем по двум дорогам.
2. Министру транспорта и министру путей сообщения поручено наладить высокоскоростное сообщение между n городами. За один ход разрешается соединить два города односторонней высокоскоростной линией и получить 1000\$ прибыли от коррупционных схем. Ходят по очереди, начинает министр транспорта, изначально никаких линий нет. Запрещено соединять линией два уже соединённых города. Запрещено также после своего хода оставлять сильно связный граф. Если очередной ход нельзя сделать, игра заканчивается. Цель министра транспорта — получить больше прибыли, чем соперник. Сможет ли министр путей сообщений ему помешать?
3. В шахматном турнире каждый участник сыграл с каждым из остальных одну партию. Докажите, что участников можно так занумеровать, что окажется, что ни один участник не проиграл непосредственно за ним следующему.
4. В Москве двустороннее движение. В течение двух лет в городе проходил ремонт всех дорог. Вследствие этого в первый год на некоторых дорогах было введено одностороннее движение. На следующий год на этих дорогах было восстановлено двустороннее движение, а на остальных дорогах введено одностороннее движение. Известно, что в каждый момент ремонта можно было проехать из любой точки города в любую другую. Докажите, что в Москве можно ввести одностороннее движение так, что из каждой точки города удастся проехать в любую другую точку.
5. В стране несколько городов, некоторые соединены односторонней дорогой. Докажите, что можно объявить некоторые города «транспортными узлами» так, чтобы при этом до любого другого города из какого-нибудь транспортного узла можно было бы доехать максимум с одной пересадкой, а между транспортными узлами дорог не было?
6. В стране несколько городов, соединённых дорогами с односторонним и двусторонним движением. Известно, что из каждого города в любой другой можно проехать ровно одним путём, не проходящим два раза через один и тот же город. Докажите, что страну можно разделить на три губернии так, чтобы ни одна дорога не соединяла два города из одной губернии.