

## Серия 23. Разнобой-3

1. В прямоугольной таблице  $9 \times 9$  отмечены 40 клеток. Горизонтальный или вертикальный ряд из 9 клеток называется хорошим, если в нем отмеченных клеток больше, чем не отмеченных. Какое наибольшее количество хороших (горизонтальных и вертикальных) рядов может иметь данная таблица?
2. Квадратный трёхчлен  $f(x)$  имеет два различных корня. Оказалось, что для любых чисел  $a$  и  $b$  верно неравенство  $f(a^2 + b^2) > f(2ab)$ . Докажите, что хотя бы один из корней трёхчлена — отрицательный.
3. Круг разделен на 2019 секторов, и в каждом написано натуральное число. В один из секторов ставится фишка. Каждым ходом прочитывается число в секторе, где стоит фишка, она сдвигается на это число секторов по часовой стрелке и там, где она остановилась, число увеличивается на 1. Докажите, что через некоторое число ходов все числа станут больше миллиона.
4. При каком наибольшем  $n$  возможно разложить 111 монет по клеткам квадратной доски  $n \times n$  так, чтобы количества монет в любых двух соседних по стороне клетках отличались ровно на 1? (В клетках может быть по несколько монет или не быть их вообще.)
5. Положительные числа  $a, b$  и  $c$  таковы, что  $abc = 1$ . Докажите, что

$$\frac{1 + ab^2}{c^3} + \frac{1 + bc^2}{a^3} + \frac{1 + ca^2}{b^3} \geq \frac{18}{a^3 + b^3 + c^3}.$$

6. Назовем *рамкой* клетчатый квадрат  $n \times n$ , из которого удалили квадрат  $(n - 2) \times (n - 2)$  с тем же центром. Клеточки рамки можно красить в белый и чёрный цвета. Назовем раскраску рамки хорошей, если рамку можно разрезать на доминошки так, что каждая доминошка состоит из клеточек разных цветов. Сколько существует хороших раскрасок?
7. Ваня задумал два положительных числа  $x$  и  $y$ . Он записал числа  $x + y$ ,  $x - y$ ,  $xy$  и  $x/y$  и показал Пете, но не сказал, какое число какой операцией получено. Может ли Петя однозначно восстановить  $x$  и  $y$ ?
8. Целые числа  $m$  и  $n$  таковы, что  $0 \leq m \leq 2n$ . Докажите, что число  $2^{2n+2} + 2^{m+2} + 1$  является точным квадратом тогда и только тогда, когда  $m = n$ .