Отборочная олимпиада

1. Имеется набор из нескольких монет номиналом 1, 2, 3 или 5 копеек. Известно, что этими монетами можно набрать ровно четыре рубля. Докажите, что ими можно набрать ровно три рубля.

Решение. Предположим противное: ровно три рубля набрать нельзя. Тогда нельзя набрать и ровно один рубль.

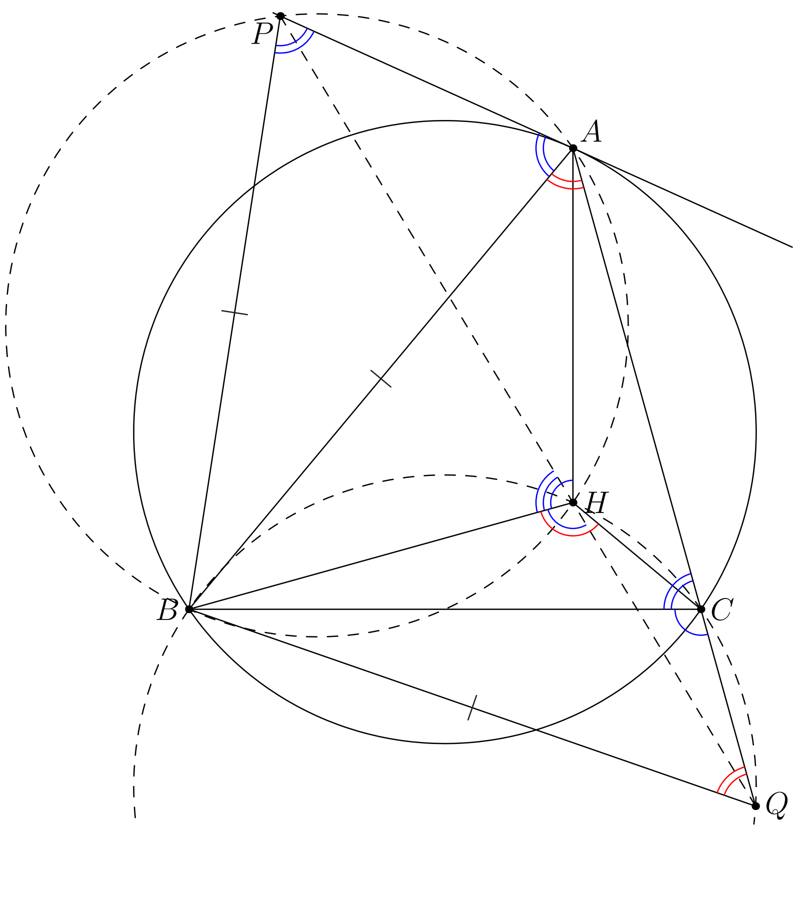
Обозначим количества монет достоинствами 1, 2, 3, 5 копеек символами x, y, z, t соответственно. Выполнено соотношение $1 \cdot x + 2 \cdot y + 3 \cdot z + 5 \cdot t = 400$.

Заметим, что $1 \cdot x < 100$, $2 \cdot y < 100$ и $5 \cdot t < 100$, так как иначе один рубль можно было бы набрать монетами одного типа. Следовательно, $3 \cdot z > 100$.

Раз $3 \cdot z > 100$, монетами достоинством 3 копейки можно набрать 99, 96, и 90 копеек. Значит, $x \leqslant 0$, $y \leqslant 1$ и $z \leqslant 1$, так как иначе можно было бы дополнить эти копейки до рубля.

Но тогда $1 \cdot x + 2 \cdot y + 5 \cdot t \leqslant 7$, откуда $3 \cdot z \geqslant 393$, и монетами по 3 копейки можно набрать ровно три рубля. Противоречие.

2. Прямая ℓ касается описанной окружности остроугольного неравенобедренного треугольника ABC в точке A. Окружность с центром B и радиусом AB вторично пересекает прямые ℓ и AC в точках P и Q. Докажите, что прямая PQ проходит через ортоцентр треугольника ABC.



Решение. Докажем, что точки A, B, H, P лежат на одной окружности:

$$\measuredangle(AP, PB) = \measuredangle(AB, AP) = \measuredangle(BC, AC) = \measuredangle(AH, BH).$$

(Равнобедренность $\triangle PBA$, угол между хордой AB и касательной AP, угол между прямыми равен углу между перпендикулярами к прямым.)

Точки B, C, H, Q также лежат на одной окружности:

$$\measuredangle(BQ, QC) = \measuredangle(AC, AB) = \measuredangle(BH, CH).$$

(Равнобедренность $\triangle ABQ$, угол между прямыми равен углу мужду перпендикулярами к прямым.)

Пользуясь доказанным вписанностями, завершим решение:

$$\measuredangle(PH, QH) = \measuredangle(PH, BH) + \measuredangle(BH, QH) = \measuredangle(PA, BA) + \measuredangle(BC, CQ) = \\ = \measuredangle(AC, BC) + \measuredangle(BC, AC) = 0.$$

3. Вещественные числа x, y, z лежат на отрезке $[0, 1]$. Докажите неравенство:

$$\sqrt{xyz} + \sqrt{(1-x)(1-y)(1-z)} \leqslant 1.$$

Решение. Для любого вещественного числа $\lambda \in [0, 1]$ выполнено неравенство $\sqrt{\lambda} \leqslant \sqrt[3]{\lambda}$. Использовав это гениальное неравенство и неравенство о средних, напишем:

$$\sqrt{xyz} + \sqrt{(1-x)(1-y)(1-z)} \leqslant \sqrt[3]{xyz} + \sqrt[3]{(1-x)(1-y)(1-z)} \leqslant \\ \leqslant \frac{x+y+z}{3} + \frac{(1-x)+(1-y)+(1-z)}{3} = 1.$$

4. Даны натуральные числа b и c такие, что $c+1$ делится на b. Докажите, что существуют такие натуральные числа x, y и z, что $x + y = bz$ и $xy = cz$.

Решение. Обозначим $(c+1)/b$ через k. По условию k — натуральное число, а $c = kb - 1$. Несложно убедиться, что числа $x = k$, $y = k(kb-1)$ и $z = k^2$ удовлетворяют условию:

$$k + k(kb-1) = k^2 b; \quad k \cdot k(kb-1) = k^2(kb-1) = k^2 c.$$

5. На плоскости внутри квадрата со стороной 1 сидят $n \geqslant 2$ зайцев. Если два зайца сидят в вершинах A и C некоторого прямоугольника $ABCD$, то за один ход они могут перепрыгнуть в вершины B и D. Докажите, что никакие два зайца не удалятся друг от друга на расстояние, большее $2\sqrt{n}$.

Решение.

Лемма. На плоскости дан прямоугольник $ABCD$. Тогда для любой точки X плоскости $XA^2 + XC^2 = XB^2 + XD^2$.

Доказательство леммы. Введём декартову систему координат с центром в центре прямоугольника, оси направим параллельно сторонам. Вершины A, B, C, D будут иметь координаты $(a,b),(-a,b),(-a,-b),(a,-b)$ для некоторых вещественных a, b. Координаты точки X обозначим через (x,y). По формуле расстояния между двумя точками

$$XA^2+XC^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(x+a)^2+(y+b)^2=XB^2+XD^2.$$

Лемма доказана.

Из леммы непосредственно следует, что сумма квадратов расстояний от центра исходного квадрата до зайцев не меняется. Изначально эту величину можно оценить сверху числом $n/2$, так как максимальное расстояние между точкой исходного квадрата и его центром равно $\sqrt{2}/2$.

Предположим, что какие-то два зайца в какой-то момент находятся на расстоянии c друг от друга и на расстояниях a и b до центра исходного квадрата. Можно написать цепь неравенств:

$$c^2\leqslant(a+b)^2\leqslant 2(a^2+b^2)\leqslant 2\cdot\frac{n}{2}=n$$

(неравенство треугольника, неравенство Коши, оценка на сумму квадратов расстояний до центра), откуда $c\leqslant\sqrt{n}$, что вдвое лучше, чем нам требовалось доказать.

6. В клетках таблицы 15×15 изначально записаны нули. За один ход разрешается выбрать любой столбец или любую строку, стереть записанные там числа и записать туда все числа от 1 до 15 в произвольном порядке — по одному в каждую клетку. Какую максимальную сумму чисел в таблице можно получить такими ходами?

Решение. *Ответ:* 2360.

Пример. Пронумеруем строки сверху вниз и столбцы слева направо в порядке возрастания. Сделаем 30 ходов в следующем порядке: 15-я строка, 15-й столбец, 14-я строка, 14-й столбец, $\ldots$, 2-я строка, 2-й столбец, 1-я строка, 1-й столбец. Каждым ходом в строку будем выписывать числа от 1 до 15 в порядке возрастания слева направо; каждым ходом в столбец будем выписывать числа от 1 до 15 в порядке возрастания сверху вниз. В результате получится следующая таблица (смотри картинку).

Сумма чисел в ней $1+3\cdot2+5\cdot3+\ldots+29\cdot15=2360$.

Оценка. Забудем временно про задачу, докажем лемму.

Лемма. Даны целые неотрицательные числа $n\geqslant x$, $m\geqslant y$. Изначально вся таблица m строк на n столбцов заставлена фишками. За одну операцию можно выбрать строку, снять все фишки с этой строки и поставить туда не менее x фишек. Или же выбрать столбец, снять фишки и поставить в столбец не менее y фишек. Тогда после любого числа операций количество фишек на доске не меньше xy.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
4	4	4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	5	5	5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6	6	6	6	6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	7	7	7	7	7	8	9	10	11	12	13	14	15
8	8	8	8	8	8	8	8	9	10	11	12	13	14	15
9	9	9	9	9	9	9	9	9	10	11	12	13	14	15
10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	11	12	13	14	15
11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	12	13	14	15
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	13	14	15
13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	14	15
14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	15
15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15

Доказательство леммы. Индукция по $x+y$. База $x=0$ или $y=0$ очевидна.

Переход. Рассмотрим доску с параметрами (m,n,x,y), сделаем несколько операций. Не умаляя общности, последнюю операцию мы сделали именно в строке, и мы назовем эту строку i. Вычеркнем строку i из таблицы. Заметим, что в полученой подтаблице $(m-1)\times n$ весь процесс шёл по правилам доски $(m-1,n,x,y-1)$. Значит, там по предположению индукции осталось не менее $x(y-1)$ фишек. В строке i не менее x фишек. Тогда всего в таблице не менее $x(y-1)+x=xy$ фишек. Переход индукции доказан, лемма доказана.

Вернёмся к исходной задаче. С помошью леммы легко получить нужные оценки: зафиксируем натуральное k в диапазаоне от 1 до 15, будем ставить фишки на числа от 0 до k. Тогда выполнены условия леммы, и по лемме фишек не менее k^2. Если для каждого $i=1,2,\ldots,15$ обозначить через s_i число вхождений числа i в таблицу, то получается оценка $s_1+s_2+\ldots+s_k\geqslant k^2$. Проворачивая эти рассуждения для каждого $k=1,2,\ldots,15$, получаем следующую систему неравенств:

$$s_1\geqslant 1^2;\;\; s_1+s_2\geqslant 2^2;\;\; s_1+s_2+s_3\geqslant 3^2;\;\; \ldots\;\; s_1+s_2+...+s_{15}\geqslant 15^2.$$

Теперь мы готовы закончить доказательство оценки:

$$\begin{aligned} s_1+2\cdot s_2+3\cdot s_3+\ldots+15\cdot s_{15}=16\cdot(s_1+s_2+\ldots+s_{15})-\\ -s_1-(s_1+s_2)-(s_1+s_2+s_3)-\ldots-(s_1+s_2+\ldots+s_{15})\leqslant\\ \leqslant 16\cdot 15^2-1^2-2^2-3^2-\ldots-15^2=2360.\end{aligned}$$