Отборочная олимпиада

1. У коллекционера есть по одной монете достоинством в 1 копейку, 2 копейки, 3 копейки и 5 копеек. Известно, что первая должна весить 1 г, вторая — 2 г, третья — 3 г и четвёртая — 5 г. Но одна из монет — бракованная, и её вес отличается от нормального. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь выявить бракованную монету и узнать, легче она или тяжелее, чем должна быть, если известно, что три остальные монеты — нормальные?

Решение. В первом взвешивании положим монеты достоинством 1 и 2 копейки на одну чашу и весов и 3 копейки — на другую. Во втором взвешивании на одну чашу положим монеты 2 и 3 копейки, а 5 копеек — на другую. Всего возможны 8 различных вариантов того, какая монета бракованная и в какую сторону отличается её вес. Из таблицы ниже видно, что в каждом из этих восьми вариантов результаты пары проведённых взвешиваний разные; следовательно, по результатам можно однозначно восстановить, какая монета бракованная и в какую сторону отличается её вес.

Бракованная монета	Тяжелее/легче св. веса	1 и 2 vs 3	2 и 3 vs 5
1 коп.	тяж.	$>$	$=$
1 коп.	лег.	$<$	$=$
2 коп.	тяж.	$>$	$>$
2 коп.	лег.	$<$	$<$
3 коп.	тяж.	$<$	$>$
3 коп.	лег.	$>$	$<$
5 коп.	тяж.	$=$	$<$
5 коп.	лег.	$=$	$>$

2. Существует ли такая бесконечная последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ натуральных чисел, что при всех натуральных значениях n уравнение

$$a_{n+2}x^2 + a_{n+1}x + a_n = 0$$

имеет хотя бы один действительный корень?

Решение. Ответ: нет.

Предположим противное: допустим, что такая последовательность есть.

Для всех натуральных n положим $b_n = a_{n+1}/a_n$.

Так как уравнение $a_{n+2}x^2 + a_{n+1}x + a_n = 0$ имеет действительный корень, то дискриминант этого уравнения неотрицателен:

$$a_{n+1}^2 - 4a_{n+2}a_n \geqslant 0.$$

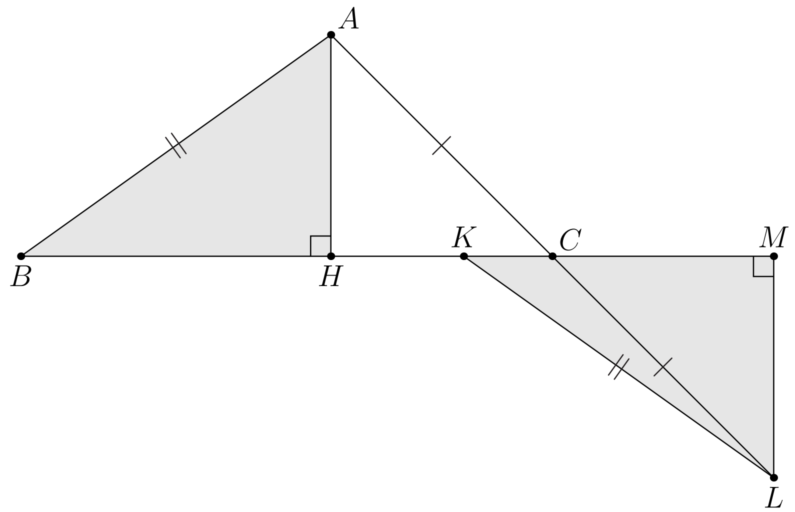
Числа a_n, a_{n+1} положительны, поэтому верно

$$a_{n+1}/a_n \geqslant 4a_{n+2}/a_{n+1},$$

то есть $b_n \geqslant 4b_{n+1}$.

Таким образом, в последовательности $b_1, b_2, b_3, \ldots$ каждый следующий член хотя бы в четыре раза меньше предыдущего. Значит, найдется такое натуральное k, что все члены этой последовательности, начиная с k-го, меньше $1/4$. Но это означает, что в последовательности $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots$ каждый следующий член хотя бы в четыре раза меньше предыдущего. Следовательно, в ней найдется член, меньший 1. Однако по условию задачи все её члены — натуральные числа. Противоречие.

3. В треугольнике ABC угол C равен $45°$, а угол A — тупой. Точка L симметрична A относительно C. На стороне BC выбрана точка K так, что $KL = AB$. Найдите отношение $BK : AH$, если H — основание высоты из вершины A треугольника ABC.



Решение. Ответ: 2.

Обозначим через M — основание перпендикуляра из точки L на прямую BC. Заметим, что поскольку $\angle C = 45°$, то треугольники AHC и LMC — равнобедренные и прямоугольные. Таким образом, $AH = HC = CM = ML$. Тогда прямоугольные треугольники ABH и LKM равны по катету и гипотенузе. Получаем, что вне зависимости от порядка точек B, H, K на прямой BC

$$\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HK} = \overrightarrow{KM} + \overrightarrow{HK} = \overrightarrow{HK} + \overrightarrow{KM} = \overrightarrow{HM} = 2 \cdot \overrightarrow{HC}.$$

Следовательно, $BK/AH = 2 \cdot HC/AH = 2$.

4. Бесконечная последовательность $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ натуральных чисел задана первым членом a_1 и следующим правилом, справедливым для всех натуральных значений n:

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= b_n/2, && \text{если } b_n \text{ — чётное;} \\ b_{n+1} &= 3b_n + 1, && \text{если } b_n \text{ — нечётное.} \end{aligned}$$

Докажите, что в этой последовательности встретится число, делящееся на 4.

Решение. Предположим противное: допустим, что в последовательности нет чисел, кратных 4.

Тогда из чётности некоторого её члена b_n следует нечётность следующего её члена $b_{n+1} = b_n/2$. Легко видеть, что нечётность её некоторого члена b_n влечёт чётность следующего члена $b_{n+1} = 3b_n + 1$. Суммируя сказанное, приходим к выводу, что чётные и нечётные числа в последовательности чередуются.

Будем считать, что при всех натуральных k все b_{2k} — чётные числа (в противном случае можно просто отбросить первый член последовательности). Выведем рекуррентное соотношение для последовательности b_{2n}. Так как выполнены равенства $b_{2n+1} = b_{2n}/2$ и $b_{2n+2} = 3b_{2n+1} + 1$, то

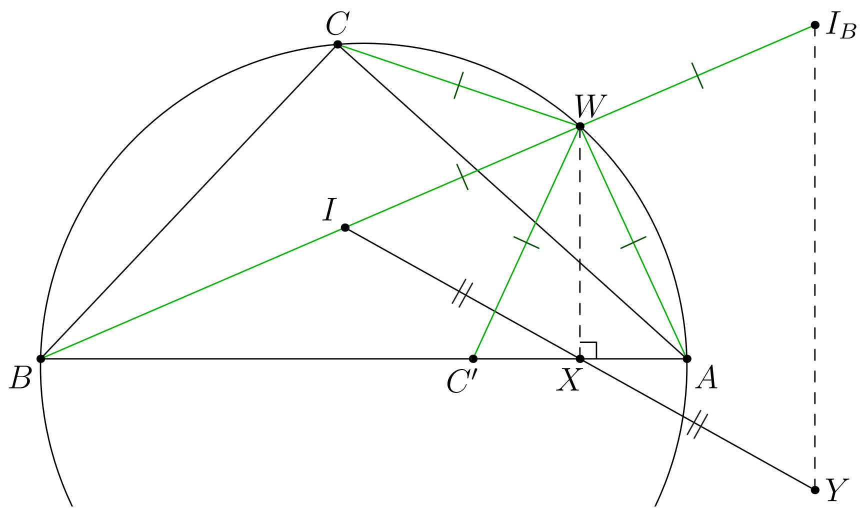
$$b_{2(n+1)} = \frac{3}{2} \cdot b_{2n} + 1.$$

Это же соотношение можно записать слегка по-другому:

$$b_{2(n+1)} + 2 = \frac{3}{2} \cdot (b_{2n} + 2).$$

Получаем, что последовательность $c_n := b_{2n}+2$ — бесконечная геометрическая прогрессия с знаменателем $\frac{3}{2}$. По условию все b_n — натуральные числа, а значит и все c_n. Но геометрическая прогрессия с знаменателем $\frac{3}{2}$ не может принимать только натуральные значения, так как степень вхождения простого множителя 2 в разложение c_n уменьшается с ростом n. Противоречие.

5. На стороне AB треугольника ABC выбрана точка X так, что $2BX = BA+BC$. Пусть Y — точка симметричная точке пересечения биссектрис треугольника ABC относительно точки X. Докажите, что $YI_B \perp AB$, где I_B — центр вневписанной окружности треугольника ABC напротив вершины B.



Решение. Отметим точку W — середину «меньшей» дуги AC описанной окружности треугольника ABC. Отложим на стороне BA такую точку C', что $BC = BC'$. Из соотношения $BX = (BA + BC)/2 = (BA + BC')/2$ непосредственно следует, что X — середина AC'.

По лемме о трезубце отрезки WA, WC, WI, WI_B равны. Из симметрии точек C и C' относительно прямой BW заключаем, что отрезки WC и WC' также равны. В равнобедренном треугольнике AWC' отрезок WX служит медианой, а значит и высотой, то есть $WX \perp AB$. Но $WX \parallel I_BY$ как средняя линия в треугольнике II_BY. Таким образом, $I_BY \perp AB$, что и требовалось доказать.

6. Во всех клетках таблицы 100×101 расставлены числа 0, 1, 2, по одному числу в каждой клетке. Оказалось, что в каждом столбце сумма чисел делится на 3 и в каждой строке сумма чисел делится на 3. Какое наибольшее возможное количество единиц может быть в этой таблице?

Решение. Ответ: 9966.

Пример. Пронумеруем строки числами от 1 до 100 и столбцы числами от 1 до 101. Обозначим клетку на пересечении i-ой строки и j-того столбца символом (i, j). Для каждого $k = 0, 2, \ldots, 32$ запишем в клетки $(3k+1, 3k+1)$ и $(3k+1, 3k+2)$ нули, а в клетки $(3k+2, 3k+3)$ и $(3k+3, 3k+3)$ — двойки. Ещё допишем по нулю в клетки $(100, 100)$ и $(100, 101)$. Во все остальные клетки таблицы впишем единицы.

Вот аналогичная расстановка чисел для таблицы 10×11.

0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0

Несложно убедиться, что приведённая расстановка чисел удовлетворяет условию задачи. Число не-единиц в ней равно $33 \cdot 4 + 2 = 134$, откуда единиц ровно $100 \cdot 101 - 134 = 9966$.

Оценка. Докажем от противного: предположим, что существует расстановка чисел, удовлетворяющая условию задачи, в которой единиц не менее 9967.

Заметим, что в каждой строчке не более 100 единиц, так как в противном случае их 101, а 101 не делится на 3. Обозначим количество строчек, где ровно 100 единиц, через x. В каждой из оставшихся $100 - x$ строчках не более 99 единиц. Следовательно,

$$100x + 99 \cdot (100 - x) \geqslant 9967,$$

откуда $x \geqslant 67$. Если в какой-то строчке ровно 100 единиц, то оставшееся число в ней должно быть равно 2, чтобы общая сумма в этой строчке делилась на 3. Получаем, что двоек в таблице хотя бы 67.

Аналогично поступаем со столбцами. Обозначим количество столбцов, где ровно 99 единиц, через y, тогда

$$99y + 98 \cdot (101 - y) \geqslant 9967,$$

откуда $y \geqslant 69$. Если в столбце ровно 99 единиц, то оставшееся число в нём должно быть равно 0, чтобы общая сумма в этом столбце делилась на 3. Получаем, что нулей хотя бы 69.

Таким образом, общее количество чисел в таблице можно оценить снизу величиной $9967 + 67 + 69 = 10103$, что больше $100 \cdot 101 = 10100$. Противоречие.