Отборочная олимпиада

1. У коллекционера есть по одной монете достоинством в 1 копейку, 2 копейки, 3 копейки и 5 копеек. Известно, что первая должна весить 1 г, вторая — 2 г, третья — 3 г и четвёртая — 5 г. Но одна из монет — бракованная, и её вес отличается от нормального. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь выявить бракованную монету и узнать, легче она или тяжелее, чем должна быть, если известно, что три остальные монеты — нормальные?

2. Существует ли такая бесконечная последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ натуральных чисел, что при всех натуральных значениях n уравнение

$$a_{n+2}x^2 + a_{n+1}x + a_n = 0$$

имеет хотя бы один действительный корень?

3. В треугольнике ABC угол C равен $45°$, а угол A — тупой. Точка L симметрична A относительно C. На стороне BC выбрана точка K так, что $KL = AB$. Найдите отношение $BK : AH$, если H — основание высоты из вершины A треугольника ABC.

4. Бесконечная последовательность $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ натуральных чисел задана первым членом a_1 и следующим правилом, справедливым для всех натуральных значений n:

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= b_n/2, && \text{если } b_n \text{ — чётное;} \\ b_{n+1} &= 3b_n + 1, && \text{если } b_n \text{ — нечётное.} \end{aligned}$$

Докажите, что в этой последовательности встретится число, делящееся на 4.

5. На стороне AB треугольника ABC выбрана точка X так, что $2BX = BA + BC$. Пусть Y — точка симметричная точке пересечения биссектрис треугольника ABC относительно точки X. Докажите, что $YI_B \perp AB$, где I_B — центр вневписанной окружности треугольника ABC напротив вершины B.

6. Во всех клетках таблицы 100×101 расставлены числа 0, 1, 2, по одному числу в каждой клетке. Оказалось, что в каждом столбце сумма чисел делится на 3 и в каждой строке сумма чисел делится на 3. Какое наибольшее возможное количество единиц может быть в этой таблице?