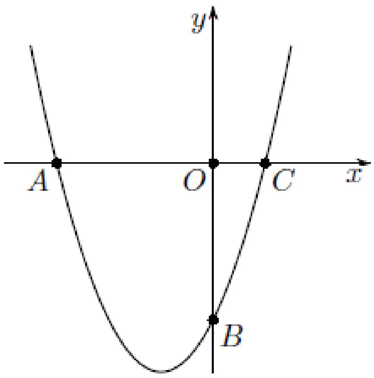
Про квадратный трехчлен

1. Известно, что корни уравнения $x^2 + px + q = 0$ — целые числа, а p и q — простые числа. Найдите p и q.

2. На рисунке изображён график функции $y = x^2 + ax + b$. Известно, что прямая AB перпендикулярна прямой $y = x$. Найдите длину отрезка OC.



3. Дан многочлен $P(t) = t^2 - 4t$. Доказать, что при любых $x \geqslant 1$ и $y \geqslant 1$ выполняется $P(x^2 + y^2) \geqslant P(2xy)$.

4. Квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ принимает в точках $1/a$ и c значения разных знаков. Докажите, что корни трёхчлена $f(x)$ имеют разные знаки.

5. Сто последовательных чётных чисел взяли в качестве коэффициентов a_k и b_k в 50 квадратных уравнениях вида $x^2 + a_k x + b_k = 0$. Могут ли все эти уравнения иметь целые корни?

6. Приведённые квадратные трёхчлены $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что уравнения

$$f\big(g(x)\big) = 0 \quad \text{и} \quad g\big(f(x)\big) = 0$$

не имеют вещественных корней. Докажите, что хотя бы одно из уравнений $f(f(x)) = 0$ и $g(g(x)) = 0$ тоже не имеет вещественных корней.

7. Дано множество различных чисел $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$, $n > 2018$. Могло ли так оказаться, что множество корней уравнений $x^2 - a_i x + b_i = 0$ (для всех $i = 1, 2, \ldots, n$) совпадает с исходным множеством?