

Теоремы Чебы и Менелая

- (а) Вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон AB , BC и AC в точках C_1 , A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке G (точка Жергонна).

(б) Внеписанные окружности треугольника ABC касаются его сторон AB , BC и AC в точках C_2 , A_2 и B_2 соответственно. Докажите, что прямые AA_2 , BB_2 и CC_2 пересекаются в одной точке N (точка Нагеля).
- (а) В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и BB_1 и биссектриса внешнего угла CC_1 . Докажите, что точки A_1 , B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

(б) В треугольнике ABC проведены биссектрисы внешних углов AA_1 , BB_1 и CC_1 (точки A_1 , B_1 и C_1 лежат на прямых BC , CA и AB). Докажите, что точки A_1 , B_1 и C_1 лежат на одной прямой.
- На сторонах BC , CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1 , B_1 и C_1 так, что отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Прямые A_1B_1 и A_1C_1 пересекают прямую, проходящую через вершину A параллельно стороне BC , в точках C_2 и B_2 соответственно. Докажите, что $AB_2 = AC_2$.
- Дан треугольник ABC и произвольная точка P . $(AP) \cap (BC) = A_1$, $(BP) \cap (AC) = B_1$, $(CP) \cap (AB) = C_1$. $(B_1C_1) \cap (BC) = A_2$, $(A_1B_1) \cap (AB) = C_2$, $(A_1C_1) \cap (AC) = B_2$. Доказать, что точки A_2 , B_2 , C_2 лежат на одной прямой, которая называется *трилинейной полярной* точки P относительно треугольника ABC .
- Прямые AP , BP , CP пересекают стороны BC , CA , AB треугольника ABC соответственно в точках A_1 , B_1 , C_1 . Около треугольника $A_1B_1C_1$ описана окружность, пересекающая вторично прямые BC , CA , AB в точках A_2 , B_2 , C_2 . Докажите, что прямые AA_2 , BB_2 , CC_2 пересекаются в одной точке.
- На прямых AB , BC и CD четырехугольника $ABCD$ взяты точки K , L и M . Прямые KL и AC пересекаются в точке P , LM и BD – в точке Q . Докажите, что точка пересечения прямых KQ и MP лежит на прямой AD .
- Из вершины C прямого угла треугольника ABC опущена высота CK , и в треугольнике ACK проведена биссектриса CE . Прямая, проходящая через точку B параллельно CE , пересекает CK в точке F . Докажите, что прямая EF делит отрезок AC пополам.
- Построение Бриансона.** Продолжения боковых сторон A_0B_0 и AB трапеции A_0B_0BA пересекаются в точке V . Точка C_1 – точка пересечения A_0B и B_0A . Точка A_1 – точка пересечения AA_0 и VC_1 . Точка C_2 – точка пересечения A_1B и B_0A . Точка A_2 – точка пересечения AA_0 и VC_2 Точка C_n – точка пересечения $A_{n-1}B$ и B_0A . Точка A_n – точка пересечения AA_0 и VC_n . Докажите, что $AA_n : A_nA_0 = 1 : n$.