Безу и Виет

1. При каких a и b многочлен $x^4 - 3x^3 + 3x^2 + ax + b$ делится на $(x-1)(x-2)$?

2. Известно, что $abc = 1$, $a+b+c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Докажите, что одно из чисел a, b или c равно 1.

3. Докажите, что не существует многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами, для которого $P(6) = 5$ и $P(14) = 9$.

4. Многочлен с целыми коэффициентами при трёх различных целых значениях переменной принимает значение 1. Докажите, что он не имеет ни одного целого корня.

5. Известно, что для рациональных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ выражения $x_1+x_2+\ldots+x_n$, $x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n$, $x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\cdots+x_{n-2}x_{n-1}x_n$, …, $x_1x_2\ldots x_n$ являются целыми. Докажите, что исходные числа являются целыми.

6. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены с целыми коэффициентами, причем $P(Q(x)) = Q(P(x))$. Докажите, что при всех целых n число $P(P(n)) - Q(Q(n))$ делится на $P(n) - Q(n)$, если $P(n) \neq Q(n)$.

7. Преподаватель заявил, что многочлен имеет 15 корней (не обязательно различных) и начал выписывать его на доску $x^{15} + 20x^{14} + 175x^{13} + \ldots$. Какое наибольшее значение может принимать корень этого многочлена?

8. Дан многочлен $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$. Известно, что каждое из уравнений $f(x) = 1$ и $f(x) = 2$ имеет четыре корня. Докажите, что если для корней первого уравнения выполняется равенство $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$, то и для корней второго уравнения выполняется аналогичное равенство.

Письменная домашняя задача. Сдать 25 октября.

9. Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Известно, что $P(1) = 2018$, $P(2018) = 1$, $P(k) = k$, где k — некоторое целое число. Найдите k.