Степень точки

1. На плоскости даны окружность и точка P. Прямая, проведенная через точку P, пересекает окружность в точках A и B.
(a) Докажите, что произведение $PA \cdot PB$ не зависит от выбора прямой.
(b) Докажите, что для точки P, лежащей на окружности, ее степень точки равна квадрату касательной, проведенной из этой точки.
(c) Найдите значение этой величины, если известно, что $OP = d$, а радиус окружности равен R. (O — центр окружности).

2. На сторонах угла с вершиной P выбраны точки A, B, C и D (A и B на одной стороне угла, C и D на другой) так, что $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. Докажите, что точки A, B, C, D лежат на одной окружности

3. В угол вписаны две окружности. Одна из них касается сторон угла в точках A и B, а другая — в точках C и D соответственно. Докажите, что прямая AD высекает на этих окружностях равные хорды. (Точки A и D лежат на разных сторонах угла).

4. В треугольнике ABC проведены окружности ω_b и ω_c, которые касаются прямой BC в точках B и C соответственно, а также проходят через точку A. Докажите, что их вторая точка пересечения лежит на медиане, проведенной из угла A.

5. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. На прямой AB выбрана произвольная точка P. Докажите, что касательные, проведенные из точки P к ω_1 и ω_2 равны.

6. Окружность делит каждую из сторон треугольника на 3 равные части. Докажите, что он правильный.

7. Доказать, что, если на основании AC равнобедренного треугольника ABC взять произвольную точку M, то $BC^2 - BM^2 = AM \cdot CM$.

8. Через центр I вписанной в неравнобедренный треугольник ABC окружности проведена прямая, перпендикулярная прямой AI и пересекающая прямую BC в точке K. Из точки I на прямую AK опущен перпендикуляр ID. Докажите, что точки A, B, C, D лежат на одной окружности.

9. На прямых, содержащих высоты BB_1 и CC_1 отметили точки, из которых соответствующие стороны (то есть AC и AB соответственно) видны под прямыми углами. Докажите, что четыре отмеченные точки лежат на одной окружности.

10. В остроугольном треугольнике ABC высоты AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке H. Точка O — центр описанной окружности. Докажите, что O, H, A_1 и точка, симметричная A относительно B_1C_1 лежат на одной окружности