

## Интерполяция

1. Решите уравнение

$$c \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + b \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + a \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} = x.$$

*Определение.* Построение такого многочлена  $P(x)$  степени не выше  $n$ , что  $P(x_i) = y_i$ , где  $0 \leq i \leq n$ , называется интерполяцией.

2. Выведите **интерполяционную формулу Лагранжа**

$$P(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{x-x_0}{x_i-x_0} \dots \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} \cdot \frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} \dots \frac{x-x_n}{x_i-x_n}.$$

3. Найдите многочлен степени не выше трех такой, что  $P(0) = 1$ ,  $P(1) = 2$ ,  $P(2) = 4$ ,  $P(3) = 8$ .
4. Докажите, что если многочлен  $f(x)$  степени  $n$  принимает целые значения в точках  $x = 0, 1, \dots, n$ , то он принимает целые значения во всех целых точках, при
- (а)  $n = 2$ ;
  - (б)  $n = 3$ ;
  - (с) любом натуральном  $n$ .
5. Вася задумал многочлен десятой степени. Петя может назвать десять вещественных чисел и Вася сообщит ему значение многочлена при одном из названных значений переменной. При этом Вася не сообщает, какое именно число из названных Петей он подставил.
- (а) Может ли Петя определить Васин многочлен за несколько вопросов?
  - (б) Если да, то какое наименьшее число вопросов ему для этого потребуется?
6. Пусть  $P(x)$  — многочлен степени не выше  $n$ , для которого  $P(i) = 2^i$  при  $i = 0, 1, \dots, n$ . Найдите  $P(n+1)$ .