

Радикальная ось

- (а) BH – высота треугольника ABC . Докажите, что $AB^2 - BC^2 = AH^2 - HC^2$.

(б) Дан отрезок AB и точки X, Y . Докажите, что $AX^2 - XB^2 = AY^2 - BY^2$ тогда и только тогда, когда $XY \perp AB$.

(в) Докажите, что для любого числа c найдется такая точка X , что $AX^2 - BX^2 = c$.
- Докажите, что все точки, имеющие одинаковую степень точки относительно двух неконцентрических окружностей ω_1 и ω_2 лежат на одной прямой, которая называется *радикальной осью* окружностей ω_1 и ω_2 .
- Пусть $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ – окружности, центры которых не лежат на одной прямой. Докажите, что их три попарные радикальные оси пересекаются в одной точке, называемой *радикальным центром* трех окружностей.
- Одна окружность проходит через вершины A, C прямоугольника $ABCD$, другая – через вершины B, D . Докажите, что их общая хорда проходит через центр прямоугольника.
- Докажите, что середины отрезков всех общих касательных к двум непересекающимся кругам лежат на одной прямой.
- Две окружности пересекаются в точках P и Q . Точка X лежит на прямой PQ , но не на отрезке PQ . Пусть точки A и D лежат на разных окружностях. Прямые XA и XD пересекают окружности второй раз в точках B и C соответственно. Докажите, что точки A, B, C и D лежат на одной окружности.
- К двум непересекающимся окружностям ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 соответственно проведена общая внешняя касательная BC ($B \in \omega_1, C \in \omega_2$). Отрезок O_1O_2 пересекает O_1 и O_2 в точках X и Y соответственно. Точку пересечения прямых BX и CY обозначим за A . Докажите, что медиана AM треугольника ABC перпендикулярна O_1O_2 .
- В четырехугольнике $ABCD$ углы A и C – прямые. На сторонах AB и CD как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках X и Y . Докажите, что прямая XY проходит через середину K диагонали AC .
- На окружности ω с диаметром AB отмечена точка C , из которой опущен перпендикуляр CH на прямую AB . Проведена окружность ω_2 с центром C и радиусом CH . Докажите, что общая хорда этих окружностей делит отрезок CH пополам.
- Через вершины B и C треугольника ABC провели перпендикулярно прямой BC прямые b и c соответственно. Серединные перпендикуляры к сторонам AC и AB пересекают прямые b и c в точках P и Q соответственно. Докажите, что прямая PQ перпендикулярна медиане AM треугольника ABC .