

Вектора и скалярное произведение

Примеры

1. Найдите угол между диагоналями AD и BF в правильном шестиугольнике $ABCDEF$.
2. Найдите угол, лежащий против основания равнобедренного треугольника, если медианы, проведенные к боковым сторонам, взаимно перпендикулярны.

Задачи

1. (а) Пусть A, B, C и D — произвольные точки плоскости. Докажите, что $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.
(б) Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.
(с) Известно, что в тетраэдре две пары скрещивающихся ребер перпендикулярны. Докажите, что и третья пара скрещивающихся ребер обладает этим свойством.
2. (а) Докажите, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки плоскости до двух противоположных вершин прямоугольника равна сумме квадратов расстояний от этой точки до двух других вершин прямоугольника.
(б) Дан прямоугольник $ABCD$ и точка P . Докажите, что $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PD}$.
(с) Дан прямоугольник $ABCD$ и точка P . Прямые, проходящие через A и B и перпендикулярные, соответственно, PC и PD , пересекаются в точке Q . Докажите, что $PQ \perp AB$.
3. Пусть O — центр описанной окружности, H — ортоцентр и M — точка пересечения медиан треугольника ABC .
(а) Докажите, что $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.
(б) Выведите из этого, что точки M, H, O лежат на одной прямой (прямая Эйлера), причем $MH = 2 \cdot OM$.
(с) Докажите, что $OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$.
4. Четырехугольник $ABCD$ вписанный. Пусть H_a — ортоцентр треугольника $B CD$, а M_a — середина отрезка AH_a . Аналогично определим M_b, M_c и M_d . Докажите, что M_a, M_b, M_c и M_d совпадают.
5. Пусть O — центр окружности, описанной около равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$), D — середина стороны AB , а E — точка пересечения медиан треугольника ACD . Докажите, что $OE \perp CD$.