

Ортоцентр

1. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC . Докажите, что
(а) точка M , симметричная H относительно прямой AC , лежит на окружности, описанной около треугольника ABC ;
(б) точка N , симметричная H относительно середины стороны AC , лежит на окружности, описанной около треугольника ABC ;
(с) BN — диаметр окружности, описанной около треугольника ABC ;
(д) радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC , AHB , BHC и AHC , равны между собой.
2. **Теорема Эйлера.** Докажите, что в любом треугольнике основания высот, середины сторон и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами, лежат на одной окружности (*окружности девяти точек*).
3. В треугольнике ABC с $\angle A = 45^\circ$ проведены высоты BB_1 и CC_1 . Докажите, что B_1C_1 — диаметр окружности девяти точек треугольника ABC .
4. Докажите, что расстояние от центра описанной около треугольника окружности до его стороны вдвое меньше расстояния от ортоцентра до противоположной вершины.
5. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1 . Пусть R , R_1 , R_2 — радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC , A_1B_1C , AA_1B_1 соответственно. Докажите, что $R^2 = R_1^2 + R_2^2$.
6. Высоты AD и CE остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Окружность, описанная около треугольника ACH , пересекает стороны AB и BC в точках F и G соответственно. Докажите, что $FG = 2DE$.
7. На сторонах AB и BC треугольника ABC нашлись такие точки M и N , отличные от вершин, что $MC = BC$ и $NA = AB$. Точка P симметрична точке B относительно прямой AC . Докажите, что PB является биссектрисой угла MPN .
8. Дан треугольник ABC с $\angle B = 60^\circ$. Пусть O — центр описанной окружности, BL — биссектриса. Описанная окружность треугольника BOl пересекает описанную окружность треугольника ABC вторично в точке D . Докажите, что $BD \perp AC$.
9. На сторонах AB , BC и CA треугольника ABC отмечены точки C_1 , A_1 и B_1 соответственно так, что $BC_1 = C_1A_1 = A_1B_1 = B_1C$. Докажите, что точка пересечения высот треугольника $C_1A_1B_1$ лежит на биссектрисе угла A .