

## Корни из единицы

1. Пусть  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  — корни  $n$ -ой степени из единицы.  
(а) Докажите, что среди них можно выбрать корень  $\alpha$  такой, что для любого  $\alpha_i$  найдется целое число  $k$  такое, что  $\alpha_i = \alpha^k$ .  
(б) Сколько существует таких корней?
2. Докажите, что  $x^{66} + x^{55} + x^{44} + x^{33} + x^{22} + x^{11} + 1$  делится на  $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ .
3. Вычислите сумму  $k$ -х степеней корней  $n$ -й степени из 1, где  $k, n$  — натуральные числа, если  
(а)  $\text{НОД}(k, n) = 1$ ;  
(б)  $\text{НОД}(k, n) \neq 1$ .

4. (а) Пусть  $\alpha = \cos \frac{2\pi}{n} + i \cdot \sin \frac{2\pi}{n}$ . Докажите, что

$$n = (1 - \alpha) \cdot (1 - \alpha^2) \cdot (1 - \alpha^3) \cdot \dots \cdot (1 - \alpha^{n-1}).$$

- (б) Для каких других корней  $n$ -ой степени из единицы это тождество выполняется?  
(с) Для нечетных  $n$  докажите, что

$$\sqrt{n} = \left| (1 - \alpha) \cdot (1 - \alpha^2) \cdot (1 - \alpha^3) \cdot \dots \cdot (1 - \alpha^{\frac{n-1}{2}}) \right|.$$

- (д) Выпишите аналогичное равенство для четного  $n$ .

5. Пусть  $A_1 A_2 \dots A_n$  — правильный  $n$ -угольник, вписанный в окружность единичного радиуса. Найдите произведение длин всех его сторон и диагоналей.
6. Пусть  $ABCDE$  — правильный пятиугольник, вписанный в окружность с центром  $O$  ( $AO = 1$ ). Точка  $P$  симметрична точке  $O$  относительно точки  $A$ , докажите, что  $PB \cdot PC = \sqrt{31}$ .
7. Пусть  $\alpha = \cos \frac{2\pi}{n} + i \cdot \sin \frac{2\pi}{n}$ . Рассмотрим сумму

$$S_n = 1 + \alpha + \alpha^4 + \alpha^9 + \dots + \alpha^{(n-1)^2}.$$

Докажите, что  $|S_n| = \sqrt{n}$ .

Стоит рассмотреть произведение  $S_n \overline{S_n}$ .