Серия 12. Про клеточки.

1. На шахматной доске расставили 8 ферзей так, что они не бьют друг друга. Сколько ферзей может стоять на чёрных клетках?

2. Дан прямоугольник 2016×2017. Можно ли из последнего столбца удалить две клетки, чтобы остальное можно было разрезать на прямоугольники 1×5 и кресты из 5 клеток?

3. В квадрате $n \times n$ отметили n клеток, по одной клетке в каждой строке и каждом столбце. При каком наибольшем k в таблице заведомо найдется квадрат $k \times k$, не содержащий отмеченных клеток?

4. Сколькими способами можно раскрасить 2500 клеток доски 100×100 в черный так, что любые две черные клетки не имеют общей вершины, а также в любой строке и любом столбце ровно 25 черных клеток?

5. Определите количество различных способов расположить ровно n^2 плиток домино без наложений на шахматной доске размера $2n \times 2n$ так, что каждый квадрат размера 2×2 содержит по крайней мере две пустых клетки, которые находятся в одной и той же строке или одном и том же столбце.

6. Куб размером $10 \times 10 \times 10$ сложен из 500 чёрных и 500 белых кубиков в шахматном порядке (кубики, примыкающие один к другому гранями, разного цвета). Из этого куба вынули 100 кубиков таким образом, чтобы в каждом из 300 рядов размером $1 \times 1 \times 10$, параллельных какому-нибудь ребру куба, стало не хватать одного кубика. Докажите, что число вынутых чёрных кубиков делится на 4.