Серия 14. Навстречу неравенствам.

1. Сумма нескольких положительных чисел равна 10. Сумма их квадратов равна 20. Какое наименьшее значение может принимать сумма их кубов?

2. Найдите максимум выражения $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i^4 - x_i^5)$, если $x_i \geqslant 0$ и $x_1 + ... + x_n = 1$

3. Числа $x_1, x_2, \ldots x_n \in [-1, 1]$ удовлетворяют равенству $x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3 = 0$.

Докажите, что $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant \frac{n}{3}$

4. (удивительные применения производной)
(a, Беларусь, отбор на IMO 2013) Известно, что $x \geq y \geq z \geq 0$. Докажите, что для любого $t > 1$ верно неравенство:

$$x^t y + y^t z + z^t x \geq y^t x + z^t y + x^t z.$$

(b) Что больше: e^π или π^e?
(c, 567 Nice and Hard Inequalities) Для положительных a, b, c докажите:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{\sqrt{b^2+1}}{\sqrt{c^2+1}} + \frac{\sqrt{c^2+1}}{\sqrt{a^2+1}}.$$

5. Для положительных a, b, c докажите неравенство:

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2} + \frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2} \geq \frac{3}{5}.$$

6. Для положительных переменных a, b, c докажите неравенство

$$T_{(9,0,0)} + T_{(7,1,1)} + T_{(5,2,2)} + 3T_{(3,3,3)} \geqslant 2T_{6,3,0} + 2T_{5,3,1} + 2T_{4,3,2}.$$