Серия 1. Многочлены. Оценки, корни, производная.

1. а) Докажите, что если $a < b$ действительные корни $P(x) \in \mathbb{R}[x]$, то производная $P'(x)$ имеет корень на отрезке $[a; b]$.
б) Докажите *теорему Лагранжа*: если $f(x)$ – непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a, b]$ функция, то на этом отрезке найдется точка найдется точка c такая, что $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

2. Найдите многочлен степени 5, дающий остатки -1 и 1 при делении на $(x-1)^3$ и $(x+1)^3$ соответственно.

3. Сколько действительных корней имеет многочлен

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n}?$$

4. Многочлен $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ степени а) 2; б) 3; в) 4 таков, что $|P(x)| \leqslant 1$ при $|x| \leqslant 1$. Найдите наибольшее значение $|P(2)|$.

5. Дано натуральное число n. Для какого наименьшего c существует приведённый многочлен $P(x)$ степени n с действительными коэффициентами, для которого выполнено $|P(x)| \leqslant c$ при всех $x \in [-1; 1]$?

6. Дан многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами. Может ли для любого натурального k уравнение $f(x) = 2^k$ иметь натуральное решение?

7. Докажите, что найдется ненулевой кратный $(x-1)^n$ многочлен степени n^2 с целыми коэффициентами, модули которых не превосходят n^2.

8. Дана последовательность действительных чисел

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} = 1.$$

Оказалось, что для любого $1 \leqslant i \leqslant n$ выполнено

$$\sum_{j \neq i} \frac{1}{x_j - x_i} = 0.$$

Докажите, что $x_{n+1-i} = 1 - x_i$.