Серия 8. Про обратные простые.

Обозначим p_n n-ое по счёту простое число.

1. а) Докажите, что

$$\prod_{i=0}^{N}\left(1+\frac{1}{p_i}+\frac{1}{p_i^2}+\ldots+\frac{1}{p_i^N}\right)>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{N}.$$

б) Докажите, что для любого $\epsilon>0$ существует такое m, что выполнено неравенство

$$\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_m}\right)<\epsilon.$$

в) Докажите, что для любого $\epsilon>0$ существует такое n, что выполнено неравенство

$$\left(1+\frac{1}{p_1}\right)\left(1+\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{p_n}\right)>\frac{1}{\epsilon}.$$

г) Докажите, что ряд обратных простых расходится.

2. Петя утверждает, что начиная с некоторого момента каждое следующее простое число больше предыдущео хотя бы в $(1+10^{-10})$ раз. Докажите, что он не прав.

3. Назовём число *избыточным*, если оно меньше суммы своих собственных делителей. Существует ли миллион последовательных избыточных чисел?

4. Дано число $x>1$. Докажите, что существует такое целое n, что

$$x<\frac{\sigma(n)}{n}<x+10^{-6}.$$

5. Дан правильный n-угольник. Любое подмножество его вершин назовём *шаблоном.* Назовём шаблон *маленьким*, если в нём меньше $\frac{1}{100}$ от общего числа вершин. Существует ли такой маленький шаблон, что любые 100 шаблонов, получающиеся из него поворотом имеют общую вершину?

6. Множество вычетов A по модулю n назовём *свободным от произведений*, если $xy\neq z$ для всех $x,y,z\in Z$ (необязательно различных). Наибольшее количество элементов в множестве, свободном от произведений, обозначим $f(n)$.
а) Докажите, что $f(n)=\frac{n-1}{2}$, если n — нечётное простое.
б) Существуют ли такие n, для которых $f(n)>\frac{n}{2}$?

О связи сходимости рядов и бесконечных произведений.

7. Числа $\alpha_i>-1$ и все одного знака. Докажите, что произведение $\prod\limits_{i=1}^{\infty}(1+\alpha_i)$ сходится (то есть $\lim\limits_{k\to\infty}\prod\limits_{i=1}^{k}(1+\alpha_i)$ существует и не равен 0) тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\alpha_i$.