

Прямоугольный и каркасный тетраэдры

На этом занятии мы рассмотрим еще два частных случая тетраэдров.

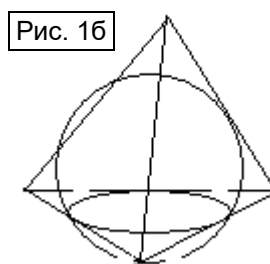
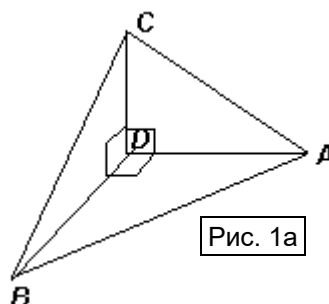
Определение 1. *Тетраэдр называется прямоугольным, если все плоские углы при одной из вершин – прямые* (см. рис. 1а).

Очевидно, что в таком тетраэдре три высоты из четырех являются ребрами.

Определение 2. *Каркасным тетраэдром называется тетраэдр, для которого существует сфера, касающаяся всех его ребер.*

Один из примеров такого тетраэдра – правильная пирамида (см. рис. 1б).

Со свойствами и признаками этих видов тетраэдров вы познакомитесь в процессе решения задач.



Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что в прямоугольном тетраэдре:

- ровно три прямых двугранных угла;
- нет плоских тупых углов;
- равны все бимедианы;
- все грани описанного параллелепипеда – ромбы с равными сторонами.

2. Являются ли утверждения задачи 1 признаками прямоугольного тетраэдра?

3. В тетраэдре $ABCD$ плоские углы при вершине D – прямые. Пусть $\angle CAD = \alpha$, $\angle CBD = \beta$, $\angle ACB = \varphi$. Докажите, что $\cos \varphi = \sin \alpha \sin \beta$.

4. Докажите, что в прямоугольном тетраэдре: а) $S^2 = \sum_{k=1}^3 S_k^2$, где S – площадь большей грани, S_k – площади остальных граней; б) $\frac{1}{H^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$, где a , b и c – длины ребер, образующих прямые углы, H – высота, проведенная к большей грани.

5. В тетраэдре $ABCD$ плоские углы при вершине A – прямые и $AB = AC + AD$. Найдите сумму плоских углов при вершине B .

6. Три двугранных угла тетраэдра – прямые.

- Докажите, что в этом тетраэдре есть три плоских прямых угла.
- Найдите длину его наибольшего ребра, если длины двух бимедиан равны a и b ($b > a$).
- Данные двугранные углы не принадлежат одной вершине. Найдите остальные двугранные углы, если известно, что они равные.

7. Докажите, что если каркасный тетраэдр является равногранным, то он правильный.

8. Докажите, что тетраэдр является каркасным тогда и только тогда, когда:

- перпендикуляры к его граням, проведенные через центры вписанных в них окружностей, пересекаются в одной точке;
- окружности, вписанные в его грани, попарно касаются (имеют ровно одну общую точку);
- равны суммы длин его скрещивающихся ребер;
- все четырехугольники, получающиеся при развертке двух его соседних граней, являются описанными.

9. Докажите, что в каркасном тетраэдре:

- суммы двугранных углов при противоположных ребрах равны;
- отрезки, соединяющие точки касания сферы с противоположными ребрами, пересекаются в одной точке.

10. Дан каркасный тетраэдр. Пусть отрезки касательных к сфере, проведенных из его вершин равны a , b , c и d . Всегда ли можно из этих четырёх отрезков сложить какой-

нибуть треугольник? (Не обязательно использовать все отрезки. Разрешается образовывать сторону треугольника из двух отрезков.)