

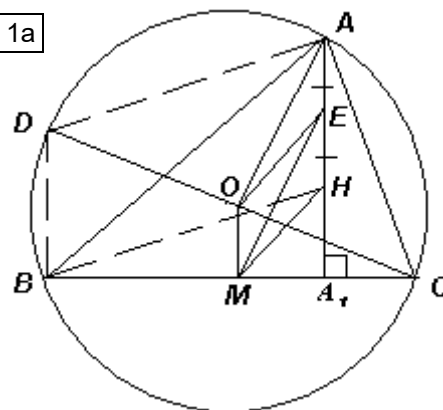
Параллелограммы в треугольнике

В течение двух занятий мы рассмотрим геометрическую конструкцию, которая некоторым из вас знакома. В процессе решения задач вы получите ряд важных фактов геометрии треугольника.

Рассмотрим остроугольный треугольник ABC , O – центр описанной около него окружности, AA_1 – высота, H – ортоцентр, M – середина BC (см. рис. 1а).

1) Докажем, что $OM = \frac{1}{2} AH$.

Рис. 1а



Решение. Проведем описанную и окружность и ее диаметр CD . Тогда $\angle DBC = 90^\circ$, значит, $BD \parallel AH$. Кроме того, $DA \perp AC$ и $BH \perp AC$, поэтому, $DA \parallel BH$. Таким образом, $BDAH$ – параллелограмм. Так как O – середина DC , M – середина BC , то OM – средняя линия треугольника BCD , следовательно, $OM \parallel BD \parallel AH$ и $OM = \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} AH$.

Таким образом, **расстояние от центра описанной окружности до стороны треугольника в два раза меньше расстояния от противоположной вершины до ортоцентра.**

2) Пусть E – середина отрезка AH . Докажите, что **четыреугольники $OMHE$ и $OMEA$ – параллелограммы.**

Решение. $OM \parallel AH$ и $OM = AE = EH$.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

- Докажите, что полученные утверждения справедливы и для случая, когда высота лежит вне треугольника.
- В треугольнике ABC : M – середина BC , O – центр описанной окружности, R – ее радиус, H – ортоцентр, E – середина AH . Докажите, что: а) $ME = R$; б) медиана AM делит отрезок OE пополам.
- Треугольники ABC и A_1BC вписаны в одну и ту же окружность, H и H_1 – их ортоцентры. Докажите, что $AH = A_1H_1$.
- В треугольнике ABC : $BC = a$; $\angle BAC = \alpha$, H – ортоцентр, R – ее радиус описанной окружности. Докажите, что: а) $AH = 2R|\cos \alpha|$; б) $AH^2 = 4R^2 - a^2$.
- В остроугольном треугольнике ABC : AA_1 – высота, M – середина BC , O – центр описанной окружности, H – ортоцентр, F – середина OH . Найдите угол A_1FM , если $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$.
- В остроугольном треугольнике ABC биссектриса AL пересекает отрезок ME в точке N (M – середина BC , E – середина AH , где H – ортоцентр). Докажите, что: а) $NE = AE$; б) $\angle ANH = 90^\circ$.
- Через ортоцентр H треугольника ABC провели прямые, параллельные сторонам AB и AC и пересекающие прямую BC в точках D и F соответственно. Через точки D и F проведены перпендикуляры к BC , пересекающие стороны AB и AC в точках D' и F' . Докажите, что прямая $D'F'$ пересекает окружность, описанную около ABC , в точках, диаметрально противоположных вершинам B и C .
- В треугольнике ABC O – центр описанной окружности, H – ортоцентр. Докажите, что $\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$ (**формула Гамильтона**).
- а) Докажите, что $OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$, где O – центр описанной окружности треугольника со сторонами a , b и c , R – ее радиус, H – ортоцентр треугольника. б) Среди всех треугольников, вписанных в данную окружность, найдите треугольник с наибольшей суммой квадратов сторон.

10. В треугольник ABC вписана окружность. Из середины каждого отрезка, соединяющего две точки касания, проводится перпендикуляр к противоположной стороне. Докажите, что эти перпендикуляры пересекаются в одной точке.