

Тренировочная устная олимпиада

1. В треугольнике ABC $\angle A = 45^\circ$, BH – высота, точка K лежит на стороне AC , причем $BC = CK$. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABK совпадает с центром вневписанной окружности треугольника BCH .
2. В трапеции $ABCD$: $AB = BC = CD$, CH – высота. Докажите, что перпендикуляр, опущенный из H на AC , проходит через середину диагонали BD .
3. Существует ли выпуклый пятиугольник, в котором каждая диагональ равна какой-то из сторон?
4. В треугольнике ABC серединные перпендикуляры к сторонам AB и BC пересекают сторону AC в точках P и Q соответственно, причем точка P лежит на отрезке AQ . Докажите, что описанные окружности треугольников PBC и QBA пересекаются на биссектрисе угла PBQ .
5. Отрезок AD – диаметр описанной окружности остроугольного треугольника ABC . Через точку пересечения высот этого треугольника провели прямую, параллельную стороне BC , которая пересекает стороны AB и AC в точках E и F соответственно. Докажите, что периметр треугольника DEF в два раза больше стороны BC .
6. Внутри равнобедренного прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AB взята точка M такая, что угол MAB на 15° больше угла MAC , а угол MCB на 15° больше угла MBC . Найдите угол BMC .