Серия 2. Разнобой-повторение

1. На окружности ω с центром в точке O лежат точки A и B, на хорде AB выбрана точка X. Прямая, проходящая через X перпендикулярно прямой OX, пересекает касательные к ω, проведенные в точках A и B, в точках C и D. Докажите, что $CX = DX$.

2. Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ нашлась такая точка X, что $\angle XDC = \angle BAC$ и $\angle XBC = \angle DAC$. Докажите, что $\angle BCA = \angle XCD$.

3. Пусть X — произвольная точка на высоте BH треугольника ABC. Прямые AX и BC пересекаются в точке P, CX и AB — в точке Q. Докажите, что HB — биссектриса угла PHQ.

4. На сторонах BC, CA, AB равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) выбраны такие точки X, Q, P соответственно, что $APXQ$ — параллелограмм. Докажите, что точка Y, симметричная точке X относительно прямой PQ, лежит на описанной окружности треугольника ABC.

5. В треугольнике ABC угол B равен 60°. Пусть AA_1 и CC_1 — биссектрисы этого треугольника. Докажите, что точка, симметричная вершине B относительно прямой A_1C_1, лежит на стороне AC.

6. Внутри треугольника ABC нарисованы три окружности ω_A, ω_B, ω_C, каждая из которых касается двух соответственных сторон треугольника. Эти три окружности также попарно касаются друг друга внешним образом: ω_B и ω_C — в точке A', ω_C и ω_A — в точке B', ω_A и ω_B — в точке C'. Докажите, что прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке.

7. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ описан около окружности ω. Пусть PQ — диаметр ω, перпендикулярный прямой AC. Известно, что прямые BP и DQ пересекаются в точке X, а прямые BQ и DP — в точке Y. Докажите, что точки X и Y лежат на прямой AC.

8. Периметр треугольника ABC равен 4. На лучах AB и AC отмечены точки X и Y так, что $AX = AY = 1$. Отрезки BC и XY пересекаются в точке M. Докажите, что периметр одного из треугольников ABM и ACM равен 2.