Серия 3. Поворотная гомотетия, часть 1.

1. На полуокружности с диаметром AB отмечена произвольная точка X. На луче XA отмечена такая точка Y, что $XY = 2 \cdot XB$. Найдите геометрическое место точек Y.

2. (**Основная лемма на сегодня**) Две окружности α и β пересекаются в точках M и N. На окружностях α и β отмечены точки X и Y соответственно так, что прямая XY проходит через точку M. Докажите, что поворотная гомотетия с центром в точке N, переводящая α в β, переводит точку X в точку Y.

3. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC отмечены точки A', B', C' соответственно. Докажите, что треугольник с вершинами в центрах окружностей $(AB'C')$, $(BC'A')$, $(CA'B')$ подобен треугольнику ABC.

4. Две окружности α и β пересекаются в точках M и N. Через точку N проводятся всевозможные отрезки XY такие, что $X \in \alpha$, $Y \in \beta$. Найдите геометрическое место середин отрезков XY.

5. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) провели высоту AD. Из точки D опустили перпендикуляр DE на сторону AC. Окружность (BAD) пересекает прямую BE в точке F, отличной от B. Докажите, что прямая AF делит отрезок DE пополам.

6. Серединный перпендикуляр к стороне BC треугольника ABC ($AB < BC$) пересекает отрезок AC в точке M. Биссектриса угла AMB пересекает окружность (ABC) в точке K. Докажите, что прямая, соединяющая инцентры треугольников AMK и BMK, перпендикулярна биссектрисе угла AKB.

7. Две окружности пересекаются в точках M и N. Через точку M проведена прямая, вторично пересекающая первую окружность в точке A, вторую — в точке B (M лежит на отрезке AB). Точки U и V — середины дуг AN и BN, не содержащих точку M. Докажите, что окружность (UVM) проходит через середину отрезка AB.

8. На сторонах BC, CA, AB остроугольного неравнобедренного треугольника ABC отмечены точки A_1, B_1, C_1 соответственно так, что $\measuredangle AA_1B = \measuredangle BB_1C = \measuredangle CC_1A$. Окружности (BA_1C_1) и (CA_1B_1) пересекаются в точке P. Докажите, что $\angle HPG = 90^\circ$, где H и G — ортоцентр и точка пересечения медиан треугольника ABC.