Серия 5. Разнобой-2

1. На стороне AB треугольника ABC выбрана точка D. Окружность (BCD) вторично пересекает окружность, проходящую через точки A и D и касающуюся прямой CD, в точке K. Точка M — середина BC, N — середина AD. Докажите, что точки B, M, N, K лежат на одной окружности.

2. Даны две концетрические окружности ω и Ω с центром в точке O, причём ω расположена внутри Ω. Прямая, проходящая через O, пересекает ω в точке A и Ω в точке B, причём O лежит на отрезке AB. Другая прямая, проходящая через O, пересекает ω в точке C и Ω в точке D, причём O лежит вне отрезка CD. Докажите, что окружность (OAC) и окружности, построенные на отрезках AB и CD как на диаметрах, имеют общую точку.

3. Про выпуклый четырёхугольник $ABCD$ известно, что $\angle ABC = \angle ACD$ и $\angle ADC = \angle ACB$. Точки X и Y — проекции точки A на прямые BC и CD. Докажите, что ортоцентр треугольника AXY лежит на прямой BD.

4. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) выбрана точка P такая, что $PB > PC$ и $\angle PBA = \angle PCB$. Точка M — середина стороны BC, точка O — центр окружности (APM). Докажите, что $\angle OAC = 2\angle BPM$.

5. Внутри остроугольного треугольника ABC отмечена точка P. Обозначим через P_A, P_B, P_C проекции точки P на стороны BC, CA, AB. Прямые BC и P_BP_C пересекаются в точке S. Окружность $(P_AP_BP_C)$ второй раз пересекает прямую BC в точке T. Докажите, что $SP \perp AT$.

6. Чевианы AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке P. Известно, что четырёхугольники BC_1PA_1 и CA_1PB_1 — описанные. Докажите, что четырёхугольник AB_1PC_1 — также описанный.