Серия 6. Отношение синусов

1. (**Лемма об отношении синусов**) На стороне BC треугольника ABC отмечена точка X. Докажите соотношение

$$\frac{\sin\angle BAX}{\sin\angle XAC} = \frac{BX}{XC} : \frac{AB}{AC}.$$

2. В треугольнике ABC проведена симедиана AS (точка S на стороне BC). Докажите, что $BS/SC = AB^2/AC^2$.

3. (**Тригонометрическая теорема Чевы**) На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC отмечены точки A_1, B_1, C_1. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{\sin\angle BAA_1}{\sin\angle A_1AC} \cdot \frac{\sin\angle CBB_1}{\sin\angle B_1BA} \cdot \frac{\sin\angle ACC_1}{\sin\angle C_1CB} = 1.$$

4. Выпуклый шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность. Докажите, что его диагонали AD, BE, CF пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA$.

5. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC с центром описанной окружности O проведены высоты BH_B и CH_C. Точки X и Y симметричны точкам H_B и H_C относительно середин сторон AC и AB соответственно. Докажите, что прямая AO делит отрезок XY пополам.

6. Чевианы AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в одной точке. Окружность ω_A касается стороны BC в точке A_1 и меньшей дуги BC окружности (ABC) в точке A'. Аналогично определяются точки B' и C'. Докажите, что прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке.

7. Вписанная в треугольник ABC окружность с центром I касается сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Точка M — середина BC. Докажите, что прямые B_1C_1, AM и IA_1 пересекаются в одной точке.

8. Чевианы AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке P. Окружности (BPC_1) и (CPB_1) пересекаются второй раз в точке M_A. Аналогично определяются точки M_B и M_C. Докажите, что прямые AM_A, BM_B и CM_C пересекаются в одной точке.

9. Противоположные стороны выпуклого шестиугольника параллельны. Докажите, что отрезки, соединяющие середины его противоположных сторон, пересекаются в одной точке.

Серия 6. Отношение синусов, доп. задачи

10. Смотрите картинку снизу листика.

11. Окружность Θ пересекает стороны BC, CA и AB треугольника ABC в точках A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 соответственно, точки лежат на окружности именно в таком порядке.
(a) Прямые C_1B_1 и B_2C_2 пересекаются в точке X_A, аналогично определим точки X_B и X_C. Докажите, что прямые AX_A, BX_B и CX_C пересекаются в одной точке.
(b) Прямые A_1B_1 и A_2C_2 пересекаются в точке Y_A, аналогично определим точки Y_B и Y_C. Докажите, что прямые AY_A, BY_B и CY_C пересекаются в одной точке.

12. Треугольник ABC вписан в окружность с центром в точке O. На «меньшей» дуге BC окружности (BOC) выбрана произвольная точка F. Окружность (BAF) второй раз пересекает прямую AC в точке P. Окружность (CAF) второй раз пересекает прямую AB в точке Q. Прямые BP и CQ пересекаются в точке K. Докажите, что прямые BC, AK и OF пересекаются в одной точке.

13. На стороне AB описанного четырёхугольника $ABCD$ отмечена точка T. Точки P, Q и R — центры вписанных окружностей треугольников BTC, CTD и DTA соответственно. Докажите, что точки P, Q, R и T лежат на одной окружности.

14. Дан треугольник ABC. Точка A_1 на вневписанной окружности ω_A выбрана так, что прямая BC делит пополам отрезок касательной к ω_A в точке A_1, высекаемый углом BAC. Аналогично выбраны точки B_1 и C_1. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.