Инверсия

1. **(a)** Пусть при инверсии с центром O точка A переходит в A' , а точка B переходит в B' . Докажите, что треугольники OAB и $OB'A'$ подобны.

   (b) Докажите, что при инверсии с центром O прямая ℓ, не проходящая через O, переходит в окружность, проходящую через O, а окружность, проходящая через O, переходит в прямую, не проходящую через O.

   (c) Докажите, что при инверсии с центром O окружность, не проходящая через O, переходит в окружность, не проходящую через O.

2. Докажите, что при инверсии касающиеся окружности (прямая и окружность) переходят в касающиеся окружности, или в касающиеся окружность и прямую, или в пару параллельных прямых.

3. Пусть при инверсии с центром O точка A переходит в A' , а точка B переходит в B' . Докажите, что $A'B' = \frac{R^2}{OA \cdot OB} AB$.

4. Точки A и B лежат на окружности ω. Касательные к окружности, проходящие через точки A и B, пересекаются в точке P. Докажите, что P является образом середины хорды AB при инверсии относительно ω.

5. Что является образом описанной окружности треугольника при инверсии относительно вписанной окружности?

6. Через точку A к окружности ω с центром O проведены касательные AX и AY, а также секущая, пересекающая окружность в точках Z и T. Докажите, что точки Z, T, O и середина XY лежат на одной окружности.

7. Дана точка P, лежащая вне окружности ζ. ζ' — образ ζ, при инверсии относительно окружности с центром P и радиусом 1. Точки A и B — основания касательных из точки P к ζ'. Докажите, что образ центра ζ при данной инверсии — середина отрезка AB.

8. Окружности ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, таковы, что ω_2 и ω_4 касаются каждой из окружностей ω_1 и ω_3. Докажите, что точки касания лежат на одной окружности или прямой.

9. Окружности ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 проходят через точку X. A_{ij} — вторая точек пересечения окружностей ω_i и ω_j. Докажите, что существует точка Y такая, что для любых i,j,k точки A_{ij}, A_{ik}, A_{jk} и Y лежат на одной окружности.

10. Пусть p — полупериметр треугольника ABC. Точки E и F на прямой BC таковы, что $AE = AF = p$. Докажите, что описанная окружность треугольника AEF касается вневписанной окружности треугольника ABC со стороны BC.