Серия 11. Предрегиональный разнобой

1. Дан выпуклый четрёхугольник $ABCD$ такой, что $\angle ABC = 90^\circ$, $AC = CD$ и $\angle BCA = \angle ACD$. Точка F — середина отрезка AD. Отрезки BF и AC пересекаются в точке L. Докажите, что $BC = CL$.
2. Диагонали трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) пересекаются в точке X. На отрезках AX, DX отмечены точки P и Q соответственно, так что $\angle AQC = \angle BPD$. Докажите, что четырёхугольник $BCQP$ — вписанный.
3. На отрезке, соединяющем точку C с серединой медианы AM равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$), нашлась такая точка X, что $\angle MXC = 90^\circ$. Докажите, что $\angle AXB = 90^\circ$.
4. На описанной окружности остроугольного треугольника ABC отмечены такие точки D и E, что $BD \perp AC$, AE — диаметр. Докажите, что площади треугольника ABC и четырёхугольника $AECD$ равны.
5. Дан параллелограмм $ABCD$ с углом 60° при вершине A. Точка O — центр окружности (ABD). Прямая AO пересекает биссектрису внешнего угла C в точке K. Найдите отношение AO/OK.
6. Две неравные окружности с центрами M и N пересекаются в точках P и Q. Касательная к первой окружности, восстановленная в точке P, пересекает касательную в точке Q ко второй окружности в точке X. Докажите, что углы PXQ и MXN имеют общую биссектрису.
7. В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$. На лучах AC и DC отмечены точки P и Q соответственно так, что $AP = AB$ и $DQ = DB$. Докажите, что прямая PQ проходит через отражение вершины B относительно прямой AD.
8. Let ABC be an acute-angled triangle with circumcircle Γ and orthocenter H. Let K be a point of Γ on the other side of BC from A. Let L be the reflection of K in the line AB, and let M be the reflection of K in the line BC. Let E be the second point of intersection of Γ with the circumcircle of triangle BLM. Show that the lines KH, EM and BC are concurrent.