

Серия 15. Угадайте точку

1. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CH . Пусть I , I_1 и I_2 центры вписанных окружностей треугольников ABC , ACH и BCH соответственно. Докажите, что CI перпендикулярно I_1I_2 .
2. Из центров вневписанных окружностей провели прямые, перпендикулярные соответствующим сторонам. Докажите, что эти три прямых пересекаются в одной точке.
3. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны. Через середины сторон AB и AD проведены прямые, соответственно перпендикулярные противоположным сторонам CD и CB . Докажите, что эти прямые пересекаются на прямой AC .
4. В неравностороннем треугольнике ABC через точку, делящую ломаную BAC пополам, провели прямую ℓ_A , параллельную биссектрисе угла BAC . Аналогично определены прямые ℓ_B и ℓ_C . Докажите, что ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C пересекаются в одной точке.
5. В треугольнике ABC угол A равен 60° . Пусть BB_1 и CC_1 — биссектрисы этого треугольника. Докажите, что точка, симметричная вершине A относительно прямой B_1C_1 , лежит на стороне BC .
6. Дан остроугольный треугольник ABC . Окружность, проходящая через вершину B и центр O его описанной окружности, вторично пересекает стороны BC и BA в точках P и Q соответственно. Докажите, что ортоцентр треугольника POQ лежит на прямой AC .
7. На стороне AC взяли произвольную точку D . В треугольники ABD и CBD вписаны окружности с центрами I_1 и I_2 соответственно. Докажите, что окружности (I_1DI_2) проходят через фиксированную точку, не зависящую от D .
8. Внутри треугольника ABC взяли точку P . Окружность с центром A и радиусом AP пересекает лучи AB и AC в точках A_B и A_C соответственно. Аналогично определяются точки B_A, B_C, C_A, C_B . Найдите все такие точки P , для которых точки A_B, B_A, B_C, C_B, C_A и A_C лежат на одной окружности.