

Алгебраический разнойбой

1. Докажите, что если $a(a - b + c) < 0$, то $b^2 > 4ac$.
2. Докажите, что если произведение положительных чисел x, y, z равно 1, то $(2+x)(2+y)(2+z) \geq 27$.
3. Может ли при каком-то n значение выражения $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$ быть точным квадратом натурального числа?
4. Докажите, что произведение n последовательных натуральных чисел делится на $n!$.
5. Сумма нескольких положительных чисел равна 10, сумма их квадратов равна 20. Какое наименьшее значение может принимать сумма их кубов?
6. Верно ли, что у любого числа можно изменить не более одной цифры так, чтобы оно стало делиться на 11?
7. Есть $2n$ карточек с цифрой 1 и n карточек с цифрой 2. Составьте из них 2 числа (используя все карточки) так, чтобы их разность была точным квадратом.
8. Решите в натуральных числах уравнение $a^3 + 1 = 3^n$.
9. Найдите все такие многочлены $P(x)$ с действительными коэффициентами, что многочлен
$$(x + 1)P(x - 1) - (x - 1)P(x)$$
является константой.
10. Приведите пример такого числа, что если его записать дважды подряд, получится точный квадрат.