

Неравенство Коши-Буняковского-Шварца

1. Известно, что $a + b + c = 1$. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$.
2. Докажите неравенство $(2a^2 + b^2)(2c^2 + b^2) \geq (ac + ab + bc)^2$.
3. С помощью КБШ докажите неравенство

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \dots + x_{2017}x_{2018} + x_{2018}x_1 \leq x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{2018}^2$$

4. Докажите неравенство

$$ax + by + cz + 2\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)} \geq (a + b + c)(x + y + z)$$

5. Известно, что $9x^2 + 16y^2 + 144z^2 = 169$. Найдите максимальное значение выражения $6x - 8y + 24z$.
6. Решите уравнение $2\sqrt{x+7} + 3\sqrt{37-2x} + 6\sqrt{3x+93} = 7\sqrt{2x+137}$.

7. (**Неравенство Седракияна**) Для положительных b_1, b_2, \dots, b_n и любых a_1, a_2, \dots, a_n докажите неравенство

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}$$

8. Для положительных a_1, \dots, a_n докажите неравенство

$$\frac{a_1^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^2}{a_2 + a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1} + a_n} + \frac{a_n^2}{a_n + a_1} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{2}$$

9. Для положительных a, b, c докажите неравенство

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

10. Для положительных a, b, c, d докажите неравенство

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2$$