Революционные многочлены. Отнять и поделить

1. Пусть P — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq b \Rightarrow a - b \mid P(a) - P(b)$.

2. Дан многочлен с целыми коэффициентами. Если в него вместо неизвестного подставить 2 или 3, то получаются числа, кратные 6. Докажите, что если вместо неизвестного в него подставить 5, то также получится число, кратное 6.

3. Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Известно, что уравнение $P(x) = 7$ имеет больше трех целочисленных корней. Докажите, что уравнение $P(x) = 9$ не имеет целочисленных корней.

4. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами принимает значение 7 при пяти различных целых значениях x. Может ли $P(x)$ иметь целые корни? Может ли $P(x)$ равняться -6 при целом x?

5. На графике многочлена с целыми коэффициентами отмечены две точки с целыми координатами. Докажите, что если расстояние между ними — целое число, то соединяющий их отрезок параллелен оси абсцисс.

6. Докажите, что не существует многочлена (степени больше нуля) с целыми коэффициентами, принимающего при каждом натуральном значении аргумента значение, равное некоторому простому числу.

7.* Учитель собирается дать детям задачу следующего вида. Он сообщит им, что он задумал многочлен $P(x)$ степени 2017 с целыми коэффициентами, старший коэффициент которого равен 1. Затем он сообщит им k целых чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k$, и отдельно сообщит значение выражения $P(n_1) \cdot P(n_2) \cdot \ldots \cdot P(n_k)$. По этим данным дети должны найти многочлен, который мог бы задумать учитель. При каком наименьшем k учитель сможет составить задачу такого вида так, чтобы многочлен, найденный детьми, обязательно совпал бы с задуманным?