

Процессы

1. Саша начертил квадрат размером 6×6 клеток и поочередно закрашивает в нем по одной клетке. Закрасив очередную клетку, он записывает в ней число — количество закрашенных клеток, соседних с ней. Закрасив весь квадрат, Саша складывает числа, записанные во всех клетках. Докажите, что в каком бы порядке Саша ни красил клетки, у него в итоге получится одна и та же сумма. Какая это сумма?
2. На прямой отмечены две точки: слева — синяя, справа — красная. За одну операцию можно добавить или стереть две отмеченные точки одинакового цвета, если между ними нет других отмеченных точек. Можно ли такими операциями добиться, чтобы на прямой остались только две отмеченные точки, но синяя — справа?
3. Правильный треугольник со стороной 3 разбит на девять треугольных клеток, как показано на рисунке ниже. В этих клетках изначально записаны нули. За один ход можно выбрать два числа, находящиеся в соседних по стороне клетках, и либо прибавить к обоим по единице, либо вычесть из обоих по единице. Петя хочет сделать несколько ходов так, чтобы после этого в клетках оказались записаны в некотором порядке последовательные натуральные числа $n, n + 1, \dots, n + 8$. При каких n он сможет это сделать?



4. Квадратный трехчлен $f(x)$ разрешается заменить на один из трехчленов $x^2 f(\frac{1}{x} + 1)$ или $(x - 1)^2 f(\frac{1}{x-1})$. Можно ли с помощью таких операций из квадратного трехчлена $x^2 + 4x + 3$ получить трехчлен $x^2 + 10x + 9$?
5. Дано 10 чисел. За одну операцию можно два неравных числа заменить на два равных с той же суммой. Может ли этот процесс для какого-то исходного набора чисел **(а)** продолжаться бесконечно долго? **(б)** заикнуться (то есть может ли один и тот же набор чисел возникнуть дважды)?
6. Есть неограниченный набор красных карточек со словами « abc », « bca », « cab » и синих карточек со словами « cba », « acb », « bac ». Из них составляют слово по такому правилу. В качестве начального слова выбирается любая карточка, а далее на каждом шаге к имеющемуся слову можно либо приклеить карточку слева или справа, либо разрезать слово в любом месте (между буквами) и вклеить карточку туда. Докажите, для составления палиндрома необходимо одинаковое количество синих и красных карточек?
7. По одной стороне бесконечного коридора расположено бесконечное количество комнат, занумерованных числами от минус бесконечности до плюс бесконечности. В комнатах живут 9 пианистов (в одной комнате могут жить несколько пианистов), кроме того, в каждой комнате находится по роялю. Каждый день какие-то два пианиста, живущие в соседних комнатах (k -й и $(k + 1)$ -й), приходят к выводу, что они мешают друг другу, и переселяются соответственно в $(k - 1)$ -ю и $(k + 2)$ -ю комнаты. Докажите, что через конечное число дней эти переселения прекратятся. (Пианисты, живущие в одной комнате, друг другу не мешают.)