Геометрия

1. Дан вписанный четырёхугольник. Для каждой вершины рассмотрим её проекцию на диагональ, не содержащую эту вершину. Докажите, что четыре полученные точки лежат на одной окружности.

2. В треугольнике ABC ($AB > BC$) на стороне AB взята точка P так, что $BP = BC$. Биссектриса BL пересекает описанную окружность в точке K. Докажите, что точки A, P, L, K лежат на одной окружности.

3. Дан треугольник ABC. Обозначим через M середину стороны AC, а через P — середину отрезка CM. Описанная окружность треугольника ABP пересекает сторону BC во внутренней точке Q. Докажите, что $\angle ABM = \angle MQP$.

4. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Третья окружность с центром в точке P пересекает первую в точках A и C, а вторую — в точках B и D (точки лежат на третьей окружности в порядке A, B, C, D). Докажите, что углы AQD и BQC равны.

5. Вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон AB и BC в точках C_1 и A_1 соответственно. Биссектриса угла A пересекает прямую A_1C_1 в точке X. Докажите, что $\angle AXC = 90°$.

6. Пусть P — произвольная точка на стороне AC треугольника ABC. На сторонах AB и CB взяты точки M и N соответственно так, что $AM = AP$ и $CN = CP$. Перпендикуляры, проведенные в точках M и N к сторонам AB и BC соответственно, пересекаются в точке Q. Докажите, что $\angle QIB = 90°$, где I — центр вписанной окружности треугольника ABC.

7. Пусть A_0 — середина стороны BC треугольника ABC. Проведём из середины отрезка BA_0 перпендикуляр в прямой AC, а из середины отрезка A_0C — перпендикуляр к прямой AB. Обозначим точку пересечения этих перпендикуляров через A'. Аналогично определим точки B' и C'. Докажите, что треугольники ABC и $A'B'C'$ подобны.

8. Продолжения медиан AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекают его описанную окружность в точках A_0, B_0 и C_0 соответственно. Оказалось, что площади треугольников ABC_0, AB_0C и A_0BC равны. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.