

## Теория чисел

1. Три натуральных числа таковы, что последняя цифра суммы любых двух из них является последней цифрой третьего числа. Произведение этих трех чисел записали на доске, а затем все, кроме трех последних цифр этого произведения, стерли. Какие три цифры могли остаться на доске?
2. Натуральное число  $m$  таково, что сумма цифр в десятичной записи числа  $2^m$  равна 8. Может ли при этом последняя цифра числа  $2^m$  быть равной 6?
3. Целые числа  $a, b, c$  таковы, что значения квадратных многочленов  $bx^2 + cx + a$  и  $cx^2 + ax + b$  при  $x = 1234$  совпадают. Может ли первый трехчлен при  $x = 1$  принимать значение 2009?
4. Докажите, что для любых натуральных чисел  $a > 1$  и  $k$  найдется натуральное  $n$ , для которого число  $k \cdot a^n + 1$  — составное.
5. Найдите все пятизначные числа, состоящие из ненулевых цифр, такие, что, каждый раз зачеркивая первую цифру, мы получаем делитель предыдущего числа. (Пусть изначально было  $\overline{abcde}$ . Тогда выполняется  $\overline{abcde} : \overline{bcde}$ ,  $\overline{bcde} : \overline{cde}$ ,  $\overline{cde} : \overline{de}$ ,  $\overline{de} : e$ .)
6. В автобусной ленте миллион билетов с номерами от 000000 до 999999. Фиолетовым цветом закрашены билеты, у которых сумма цифр на четных местах равна сумме цифр на нечетных местах. Каково наибольшее расстояние между двумя соседними фиолетовыми билетами?
7. Натуральное число  $b$  назовем *удачным*, если для любого натурального  $a$  тако-го, что  $a^5$  делится на  $b^2$ , число  $a^2$  делится на  $b$ . Найдите количество удачных натуральных чисел, меньших 2018.
8. Найдите все натуральные  $k$  такие, что при каждом нечетном  $n > 100$  число  $20^n + 13^n$  делится на  $k$ .