

Региональный разнобой

Регион близко.

Эддард Старк

1. После просмотра фильма зрители по очереди оценивали фильм целым числом баллов от 0 до 10. В каждый момент времени рейтинг фильма вычислялся как сумма всех выставленных оценок, делённая на их количество. В некоторый момент времени T рейтинг оказался целым числом, а затем с каждым новым проголосовавшим зрителем он уменьшался на единицу. Какое наибольшее количество зрителей могло проголосовать после момента T ?
2. Треугольник ABC вписан в окружность Ω с центром O . Окружность, построенная на AO как на диаметре, пересекает описанную окружность треугольника OBC в точке $S \neq O$. Касательные к Ω в точках B и C пересекаются в точке P . Докажите, что точки A , S и P лежат на одной прямой.
3. Даны числа a , b , c . Известно, что для любого x верно неравенство

$$ax^2 + bx + c \geq bx^2 + cx + a \geq cx^2 + ax + b.$$

Докажите, что $a = b = c$.

4. На доску выписаны 2019 чисел. Оказалось, что сумма любых трёх выписанных чисел также является выписанным числом. Какое наименьшее количество нулей может быть среди этих чисел?
5. В компании из 16 людей среди любых 8 есть один, знающий остальных. Докажите, что в этой компании есть 8 попарно знакомых человек.
6. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник, ω_{AB} , ω_{BC} , ω_{CD} , ω_{DA} — окружности, построенные на сторонах AB , BC , CD , DA соответственно как на диаметрах. Известно, что окружность ω_{AB} касается окружности ω_{CD} , а окружность ω_{BC} касается окружности ω_{AD} . Докажите, что $ABCD$ — ромб.
7. Пусть a и b — различные натуральные числа, большие 1000000, и такие, что $(a + b)^3$ делится на ab . Докажите, что $|a - b| > 10000$.
8. Может ли ладья обойти все клетки доски 10×10 , побывав на каждой клетке ровно по одному разу, чередуя ходы в одну и в две клетки?