

## Рациональное и не очень. Добавка

1. Существуют ли иррациональные числа  $a$  и  $b$  такие, что число  $a^b$  рациональное?
2. При разложении чисел  $A$  и  $B$  в бесконечные десятичные дроби длины минимальных периодов этих дробей равны 6 и 12 соответственно. Чему может быть равна длина минимального периода числа  $A + B$ ?
3. Сумма и произведение двух чисто периодических десятичных дробей — чисто периодические дроби с периодом  $T$ . Докажите, что исходные дроби имеют периоды не больше  $T$ .
4. (а) Докажите, что  $\cos n\varphi$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) представляется как многочлен от  $\cos \varphi$ , причем если  $T_n(x)$  — тот самый многочлен, где  $x = \cos \varphi$ , то

$$T_{n+1}(x) = 2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x).$$

(б) Докажите, что  $\cos 20^\circ$  иррационален.

(с) Докажите, что если  $\cos\left(\frac{p}{q}\right)^\circ = \frac{m}{n}$ , где  $p, q, m, n \in \mathbb{Z}$ , то  $n$  является степенью двойки (возможно, нулевой).

(д) Докажите, что на самом деле  $\frac{m}{n}$  может равняться только одному из чисел  $0, \pm 1, \pm \frac{1}{2}$ .

(е) Выведите отсюда, что при  $n \neq 4$  не существует правильного  $n$ -угольника с вершинами в узлах целочисленной решётки.