

Разнойбой-4

1. Числа a, b, c, d таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$. Докажите, что

$$(2 + a)(2 + b) \geq cd.$$

2. Каждая сторона треугольника не превосходит 1. Докажите, что его площадь не больше $\sqrt{3}/4$.
3. В угол с вершиной в точке A вписано две окружности ω_1 и ω_2 , которые пересекаются в точке P и Q . На окружности ω_1 взята точка B_1 , находящаяся внутри окружности ω_2 ; на ω_2 взята точка B_2 , находящаяся внутри окружности ω_1 , причём так, что точки A, B_1, B_2 лежат на одной прямой. Проведены касательная в точке B_1 к окружности ω_1 и касательная в точке B_2 к окружности ω_2 , они пересекаются в точке R . Докажите, что точки P, Q, R лежат на одной прямой.
4. Назовём точку D строго внутри треугольника ABC *плохой*, если из отрезков DA, DB, DC нельзя сложить треугольник. Найдите все треугольники без плохих точек.
5. *Неотрицательные* числа x, y, z таковы, что $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Докажите, что

$$(x - y)(y + z)(x + z) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

6. вещественные числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2. \end{cases}$$

Докажите, что среди этих чисел найдутся два, разность между которыми не меньше 1.

7. Дано натуральное число $n > 2$. Рассмотрим все покраски клеток доски $n \times n$ в k цветов такие, что каждая клетка покрашена ровно в один цвет, и все k цветов встречаются. При каком наименьшем k в любой такой покраске найдутся четыре окрашенных в четыре разных цвета клетки, расположенные в пересечении двух строк и двух столбцов?