Усреднение (комбинаторика)

1. По кругу расставлено 100 чисел. Сумма всех чисел равна 1. Может ли сумма любых семи подряд идущих чисел быть отрицательна?

2. В квадратной таблице в каждой клетке стоит по фишке. Известно, что после некоторой перестановки фишек, все попарные расстояния между ними не уменьшились (после перестановки в каждой клетке опять находится по одной фишке). Докажите, что на самом деле никакое расстояние между фишками не изменилось.

3. Во взводе 10 человек. В каждый из 100 дней какие-то четверо назначались дежурными. Докажите, что какие-то двое были вместе на дежурстве не менее 14 раз.

4. Есть два ожерелья, в каждом ожерелье по 100 чёрных и 100 белых бусинок. Оксана хочет приложить второе ожерелье к первому (разрешается поворачивать и переворачивать) так, чтобы как можно больше бусинок совпало по цвету. Какое число совпадающих бусинок Оксана может гарантированно получить?

5. На столе лежат 5 часов со стрелками. Разрешается любые несколько из них перевести *вперед*. Для каждых часов время, на которое при этом их перевели, назовем временем перевода. Требуется все часы установить так, чтобы они показывали одинаковое время. За какое наименьшее суммарное время перевода это можно гарантированно сделать?

6. На столе у учителя стоят весы. На весах стоят гири не обязательно одного веса, на каждой из которых написаны фамилии одного или нескольких учеников. Ученик, входя в класс, переставляет на другую чашку весов каждую гирю, на которой написана его фамилия. Докажите, что можно впустить в класс таких учеников, чтобы в результате перевесила не та чашка весов, которая перевешивала вначале (вначале какая-то чашка перевешивала).

7. Докажите, что для любого натурального $n \geqslant 3$ сущеуствует полный ориентированный граф (между любыми двумя вершинами проведено ребро, ориентированное в какую-то сторону) на n вершинах, в котором больше $\frac{n!}{2^{n-1}}$ гамильтоновых путей.

Гамильтоновым путём называется простой путь, проходящий по всем вершинам.

8. На доске выписаны в ряд n положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Вася хочет выписать под каждым числом a_i число $b_i \geqslant a_i$ так, чтобы для любых двух из чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$ отношение одного из них к другому было степенью двойки. Докажите, что Вася может выписать требуемые числа так, чтобы выполнялось неравенство $b_1 b_2 \ldots b_n \leqslant 2^{(n-1)/2} a_1 a_2 \ldots a_n$.