

Кружок в Хамовниках. 10 класс
Серия 1. Усреднение.

1. По кругу расставлено 100 чисел. Сумма всех чисел равна 1. Может ли сумма любых семи подряд идущих чисел быть отрицательна?
2. В классе 20 детей. Каждый день какие-то пары из них при встрече пожимают друг другу руки, а какие-то нет. Известно, что всего за месяц было совершено 2015 рукопожатий. Докажите, что можно выделить группу из 7 человек так, чтобы между детьми из этой группы было совершено не менее 211 рукопожатий.
3. Во взводе 10 человек. В каждый из 100 дней какие-то четверо назначались дежурными. Докажите, что какие-то двое были вместе на дежурстве не менее 14 раз.
4. На столе лежат 5 часов со стрелками. Разрешается любые несколько из них перевести вперед. Для каждого часа время, на которое при этом их перевели, назовем временем перевода. Требуется все часы установить так, чтобы они показывали одинаковое время. За какое наименьшее суммарное время перевода это можно гарантированно сделать?
5. Есть два ожерелья, в каждом ожерелье по 100 чёрных и 100 белых бусинок. Оксана хочет приложить второе ожерелье к первому (разрешается поворачивать и переворачивать) так, чтобы как можно больше бусинок совпало по цвету. Какое число совпадающих бусинок Оксана может гарантированно получить?
6. У каждого из жителей города N знакомые составляют не менее 30% населения города. Житель идёт на выборы, если баллотируется хотя бы один из его знакомых. Докажите, что можно так провести выборы мэра города из двух кандидатов, что в них примет участие не менее половины жителей.
7. Докажите, что из графа G можно удалить не более, чем $1/n$ часть его рёбер так, чтобы вершины оставшегося графа можно было покрасить правильным образом в n цветов.
8. Периметр выпуклого многоугольника равен π . Докажите, что его проекция на некоторую прямую имеет длину хотя бы 1.