Кружок в "Хамовниках". 10 класс. 2015-2016 учебный год. **Серия2.**

Побитовая сумма.

9. а) Для каких x верно равенство $x + 1 = x \oplus 1$?
б) Сколько существует пар чисел (a, b), меньших 1024, таких, что $a \oplus b = a + b$?
в) Сколько существует чисел n, меньших 1000, таких, что $n \oplus 2n = 3n$?

10. Назовём набор последовательностей из 0 и 1 длины n *хорошим*, если любые две последовательности отличаются хотя бы в k разрядах. Докажите, что если есть хороший набор из 3 последовательностей, то к нему всегда можно добавить ещё одну. (*Постарайтесь избежать какого бы то ни было разбора случаев, примените новое.*)

11. а) Даны несколько натуральных чисел, побитовая сумма двоичных записей которых равна двоичной записи некоторого ненулевого числа. Докажите, что одно из чисел можно уменьшить так, чтобы побитовая сумма стала равна 0.
б) (*Воспоминания о прошлогоднем кружке.*) На столе лежат n куч, в которых $a_1, a_2 \ldots a_n$ камней. Двое по очереди берут любое количество камней из любой кучи. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Докажите, что у второго есть выигрышная стратегия тогда и только тогда, когда побитовая сумма чисел $a_1, a_2 \ldots a_n$ равна нулю.

12. а) Фокусник и ассистент показывают фокус. Ассистент даёт в распоряжение зрителя шахматную доску. Зритель может перекрасить некоторые клетки и называет ассистенту одну из клеток. После чего ассистент перекрашивает ещё одну клетку. Затем входит фокусник. Он видит только текущее состояние доски. И должен назвать клетку, которую загадал зритель. Придумайте алгоритм, позволяющий ассистенту и фокуснику осуществить задуманное.
б) *(Вопрос немного в сторону.)* А при каком количестве клеток на доске такой фокус в принципе может получиться?

13. Есть n не горящих лампочек и k выключателей. Каждый выключатель соединён с некоторыми лампочками. При нажатии выключателя, все соединённые с ним лампочки меняют своё состояние (если горели, то гаснут, если не горели, то загораются)
а) Докажите, что если $k < n$, то при любом соединени между лампочками и выключателями найдётся комбинация горящих лампочек, которую нельзя получить.
б) Докажите, что если $k > n$, то при любом соединении можно нажать на некоторые выключатели так, чтобы ни одна лампочка в итоге не загорелась.

14. В 10-элементном множестве выбрали а) одно б) два в) три подмножества. Сколько может существовать подмножеств, пересекающихся с каждым из выбранных по нечётному числу элементов?

15. k студентов посещали лекции. Всего было n лекций. Каждый студент посетил нечётное число лекций, а любые два вместе были на чётном числе лекций. Докажите, что $n \geqslant k$.

16. (*Была на осенних сборах в прошлом году. Поймите, причём тут побитовая сумма.*) По кругу сидят n хамелеонов, причём n не кратно 3. Каждый хамелеон окрашен либо в красный цвет, либо в зелёный. Каждую минуту все хамелоны, соседи которых окрашены в разные цвета, меняют свой цвет. Докажите, что рано или поздно комбинация кветов хамелеонов повторится с первоначальной. *(Подсказка: поймите, что для этого необходимо и достаточно доказать, что по каждой ситуации должна однозначно восстанавливаться предыдущая)*