Серия 4. О пользе "сложных" выкладок.

Упражнение 1. Вспомните *бином Ньютона*: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$.

Упражнение 2. Какой будет коэффициент при $a^4b^3c^2d$ после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых в выражении $(a+b+c+d)^{10}$?

Упражнение 3. Докажите, что если p — просто число, а $0 < k < p$, то C_p^k делится на p.

21. а) Докажите, что $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$.
б) Получите отсюда доказательство малой теоремы Ферма.

Пусть p — простое число. Обозначим $ord_p(n)$ — степень вхождения числа p в разложение числа n на простые множители.

22. Пусть $a-1$ делится на p, а l не делится на p. Докажите, что $ord_p(a-1) = ord_p(a^l-1)$.

23. Пусть $a-1$ делится на p, а $p > 2$ (и, по традиции, простое).
Докажите, что $ord_p(a^p-1) = 1 + ord_p(a-1)$.

24. а) Докажите *лемму об уточнении показателя:* если p — нечётное простое число и $a-1$ делится на p, то $ord_p(a^n-1) = ord_p(n) + ord_p(a-1)$.
б) Сформулируйте и докажите лемму об уточнении показателя, если $p = 2$.

25. Дано простое число p. Вася написал на доске $2p-1$ целое число. После чего Петя выписал все возможные наборы по p чисел (всего C_{2p-1}^p наборов), сложил числа в каждом наборе, возвёл сумму набора в степень $p-1$ и сложил все C_{2p-1}^p степеней. Докажите, что результат делится на p.

26. Докажите **теорему Эрдеша-Гинзбурга-Зива**: из любых $2p-1$ целых чисел можно выбрать p, сумма которых делится на p.

27. Найдите значение суммы

$$\sum_{S \subseteq \{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{|S|} \left(\sum_{i \in S} x_i \right)^n$$

при $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}, \ldots, x_n = \frac{1}{n}$. (Через $|S|$ обозначено количество элементов в подмножестве S.)