Серия 7. Иррациональности. Числовые поля.

39. а) Докажите, что число $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ иррационально.
б) Докажите, что число $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ иррационально.

40. Докажите, что если число $a+b\sqrt{2}$, где a и b рациональные, является корнем многочлена с целыми коэффициентами, то число $a-b\sqrt{2}$ является корнем того же многочлена.
б) Число $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$ является корнем многочлена с целыми коэффициентами. Найдите ещё три числа, являющиеся корнями того же многочлена.

41. Докажите, что число $14+10\sqrt{2}$ не может быть представлено в виде суммы чисел вида $(a+b\sqrt{2})^2$, где a, b – рациональные.

42. Придумайте многочлен с целыми коэффициентами, корнями которого были бы числа а) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ б) $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$.

43. Избавьтесь от иррациональностей в знаменателе в следующих дробях:
а) $\frac{1}{5+\sqrt{2}}$; б) $\frac{1}{5+\sqrt[3]{2}}$; в) $\frac{1}{5+\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}}$; г) $\frac{1}{\alpha^2-\alpha+1}$, где α — корень многочлена x^3-3x+1.

Определение. Подмножество множества комплексных чисел называется *числовым полем*, если в нём есть хотя бы одно ненулевое число и оно замкнуто относительно четырёх арифметических операций (то есть вместе с любыми двумя своими элементами содержит их сумму, разность, произведение и частное).

44. Являются ли числовыми полями следующие множества:
а) множество всех рациональных чисел;
б) множество всех целых чисел;
в) числа, представимых в виде $a+b\sqrt{2}$, где a и b рациональные;
г) числа вида $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}$, где $a, b, c \in \mathbb{Q}$;
д) числа вида $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}$, где $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$;
е) числа, являющиеся корнями (не обязательно вещественными) квадратных трёхчленов с целыми коэффициентами?

45. Докажите, что любое числовое поле содержит все рациональные числа.

Таким образом, числовое поле Q является *минимальным по включению* среди всех числовых полей.

Определение. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – произвольные числа. Тогда минимальное по включению числовое поле, содержащее $x_1, x_2, \ldots, x_n$, называется числовым полем, *порождённым* числами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и обозначается $\mathbb{Q}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.

46. а) Докажите, что $\mathbb{Q}[\sqrt{10}]$ совпадает с множеством чисел вида $a+b\sqrt{10}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$.
б) Найдите аналогичную форму записи для чисел из $\mathbb{Q}[\sqrt{3}, \sqrt{5}]$
в) Найдите аналогичную форму записи для чисел из $\mathbb{Q}[\sqrt[2]{2}]$;
г) Докажите, что $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ и $\mathbb{Q}[\sqrt{2}+\sqrt{3}]$ – одно и то же числовое поле.

47. а) Пусть p – простое число, $a_1+a_2\sqrt{p}=b_1+b_2\sqrt{p}$ и $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Q}$. Докажите, что $a_1=b_1$ и $a_2=b_2$.
б) Пусть p_1 и p_2 – различные простые числа, и для рациональных чисел $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4$ выполнено

$$a_1+a_2\sqrt{p_1}+a_3\sqrt{p_2}+a_4\sqrt{p_1p_2}=b_1+b_2\sqrt{p_1}+b_3\sqrt{p_2}+b_4\sqrt{p_1p_2}.$$

Докажите, что числа a_i равны соответствующим b_i.
в)* Сформулируйте и докажите аналогчиный факт для k различных простых чисел.

50. Докажите, что квадрат нельзя разрезать на равные прямоугольные треугольники с углом $30°$.

51. Квадрат со стороной 1 разрезали на равные прямоугольники. Докажите, что стороны прямоугольников рациональны.

52. Квадрат разрезан на прямоугольные треугольники с катетами 1 и 2. Доказать, что число треугольников четно.