Серия 6. Периодичность и зацикливание.

Упражнение 1. Найдите последнюю цифру числа 2^{100}.

Упражнение 2. В последовательности $1, 1, 2, 3, 5, \ldots$ чисел Фибоначчи найдите последнюю цифру шестьсот шестьдесят шестого числа.

Напоминаем, что числа Фибоначчи определяются по правилу $F_1 = F_2 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

32. Докажите, что найдётся число Фибоначчи, оканчивающееся на 008.

33. В стране 10 городов, некоторые из них соединены дорогой с односторонним движением, в каждый город ровно одна дорога входит и из каждого города ровно одна дорога выходит. В каждом городе находится по автомобилисту. Каждый день каждый автомобилист проезжает одну дорогу. Найдите такое минимальное $N > 1$, что ровно через N дней все автомобилисты будут в тех городах, из которых начинали движение, вне зависимости от того, как именно проложены дороги.

34. Натуральное число заменяют суммой кубов своих цифр. Докажите, что когда-нибудь получится то число, которое уже было.

35. Дана бесконечная вправо последовательность букв русского алфавита. Известно, что в ней различных подслов длины 100 столько же, сколько различных подслов длины 101. Докажите, что последовательность периодична, возможно, с предпериодом (а если была бы бесконечна а обе стороны, то просто периодична).

36. Есть неограниченное число чёрных и белых кубиков. Нужно построить из них башню в форме параллепипеда так, чтобы каждый чёрный кубик граничил с чётным числом белых, а каждый белый – с нечётным числом чёрных. При любом ли нижнем заданном слое кубиков такую башню конечной высоты можно построить?

37. а) Есть бесконечная в обе стороны клетчатая полоса, состоящая их белых клеток и шаблон – некоторое конечное подмножество клеток полосы. Разрешается сдвигать шаблон и одновременно перекоашивать все клетки (белые на чёрные и наоборот), покрытые сдвигом шаблона. Докажите, что можно сделать серию перекрашиваний так, чтобы чёрными были ровно две клетки .

б) Пусть P – многочлен, коэффициентами которого являются остатки по простому модулю p, и младший коэффициент P равен 1. Докажите, что существует такое k, что многочлен $x^k - 1$ делится на P.

Все операции производятся по модулю p. Например, при $p = 3$ выполнено $(x^2 + 2x + 1)(x + 1) \equiv x^3 + 1$, поэтому считают, что многочлен $x^3 + 1$ делится на $x^2 + 2x + 1$ по модулю 3.

38. По кругу расставлено несколько коробочек. В каждой из них может лежать один или несколько шариков (или она может быть пустой). За один ход разрешается взять все шарики из любой коробочки и разложить их, двигаясь по часовой стрелке, начиная со следующей коробочки, кладя в каждую коробочку по одному шарику.

а) Докажите, что если на каждом следующем ходе шарики берут из той коробочки, в которую попал последний шарик на предыдущем ходе, то в какой-то момент повторится начальное размещение шариков.

б) Докажите, что за несколько ходов из любого начального размещения шариков по коробочкам можно получить любое другое.