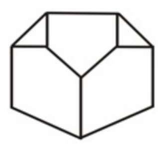
Кружок в Хамовниках. 7 класс. 19.09.2015

Серия 2. Обход графов

Теорема 1. Для всякого связного графа, у которого степень каждой вершины четна, существует путь, проходящий по каждому ребру ровно один раз. Его можно начать с любой вершины, и он обязательно кончается в той же вершине.

Теорема 2. Для всякого связного графа, у которого ровно две вершины имеют нечетную степень, существует путь, проходящий по каждому ребру ровно один раз. Он обязательно начинается в одной из этих вершин и заканчивается в другой.

1. Незнайка хочет прогуляться по парку и его окрестностям (см. рис.) так, чтобы перелезть через каждый забор ровно один раз. Удастся ли ему это?



2. Можно ли нарисовать на поверхности кубика Рубика такой замкнутый путь, который проходит через каждый квадратик ровно один раз (через вершины квадратиков путь не проходит)?

3. Имеется несколько городов, некоторые из них соединены автобусными маршрутами (без остановок в пути). Из любого города можно проехать в любой (возможно, с пересадками). Иванов купил по одному билету на каждый маршрут (то есть может проехать по нему один раз всё равно в какую сторону). Петров купил N билетов на каждый маршрут. Иванов и Петров выехали из города A. Иванов использовал все свои билеты, новых не покупал и оказался в другом городе B. Петров некоторое время ездил по купленным билетам, оказался в городе X и не может из него выехать, не купив новый билет. Докажите, что X — это либо A, либо B.

4. На плоскости нарисованы несколько окружностей, образующих связную фигуру. Докажите, что эту фигуру можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги.

5. Какое расстояние надо пройти, чтобы обойти все рёбра квадрата 3×3, если

1. нужно вернуться в ту вершину, с которой обход начинался;
2. возвращаться в начальную вершину не обязательно.

6. Доказать, что связный граф можно обойти, проходя по каждому ребру дважды.

7. Турист приехал на вокзал и отправился гулять по улицам города (каждая улица соединяет ровно два перекрестка). Докажите, что он в любой момент может вернуться на вокзал, проходя только по тем участкам улиц, по которым он уже проходил нечетное число раз.

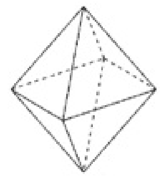
8. В некоторой стране два вида транспорта: автомобильный и железнодорожный. Причем из каждого города выходит одинаковое число дорог того и другого вида, и от любого города можно добраться в любой другой. Джеймсу Бонду не разрешается пользоваться одним и тем же видом транспорта два раза подряд. Докажите, что он сможет добраться из любого города в любой, не нарушая запрета.

Кружок в Хамовниках. 7 класс. 19.09.2015

Непрерывная олимпиада — 2

1. Дан кусок проволоки длиной 120 см. Можно ли, не ломая его, изготовить каркас:

a) октаэдра со стороной 10 см?



b) куба со стороной 10 см?

c) Какое наименьшее число раз придется ломать проволоку, чтобы всё же изготовить требуемый каркас?

2. В комнате находится 100 людей – рыцарей и лжецов. Каждый человек произносит фразу «Сейчас в комнате нечетное число рыцарей», после чего мгновенно выходит. Кем был второй вышедший человек?

3. Докажите, что если число $a^2 + b^2$ делится на 21, то оно делится и на 441.

4. Можно ли кубик Рубика без центра сложить из блоков 1x1x2?

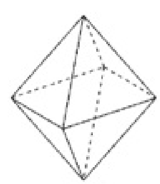
5. На прямой лежит конечное число непересекающихся дорожек суммарной длины более 1 метра. Докажите, что можно прибить гвоздями две из них так, что расстояние между гвоздями – целое число метров.

Кружок в Хамовниках. 7 класс. 19.09.2015

Непрерывная олимпиада — 2

1. Дан кусок проволоки длиной 120 см. Можно ли, не ломая его, изготовить каркас:

a) октаэдра со стороной 10 см?



b) куба со стороной 10 см?

c) Какое наименьшее число раз придется ломать проволоку, чтобы всё же изготовить требуемый каркас?

2. В комнате находится 100 людей – рыцарей и лжецов. Каждый человек произносит фразу «Сейчас в комнате нечетное число рыцарей», после чего мгновенно выходит. Кем был второй вышедший человек?

3. Докажите, что если число $a^2 + b^2$ делится на 21, то оно делится и на 441.

4. Можно ли кубик Рубика без центра сложить из блоков 1x1x2?

5. На прямой лежит конечное число непересекающихся дорожек суммарной длины более 1 метра. Докажите, что можно прибить гвоздями две из них так, что расстояние между гвоздями – целое число метров.