

Серия 4. Арифметика, остатки, последовательности ¹

1. В строчку написано 43 числа так, что сумма любых шести подряд идущих чисел равна 57. Первое число 5. Каким может быть последнее число?
2. По кругу написано 43 числа так, что сумма любых шести подряд идущих чисел одинаковая. Первое число 5. Докажите, что все числа равны 5.
3. По кругу стоят a детей. Дед Мороз ходит по кругу с мешком подарков. Сначала он даёт подарок одному из детей. Затем он отсчитывает b детей по часовой стрелке и даёт подарок ребёнку, на котором закончил счёт. (Скажем, если $b = 1$, то Дед Мороз даёт подарок следующему ребёнку, если $b = 2$, то пропускает одного.) При каких a и b Дед Мороз даст подарок каждому ребёнку?
4. Докажите, что $a^n - b^n$ делится на $a - b$.
5. Найдите последние цифры чисел $7^7, 7^{7^7}, 7^{7^{7^7}}$.
6. Докажите, что последовательность последних цифр чисел $7^7, 7^{7^7}, 7^{7^{7^7}}, \dots$ является периодической.
7. Даны натуральные числа a и b . Докажите, что для некоторых различных натуральных k и l число $a^k - a^l$ делится на b .
8. Если натуральные числа a, b взаимно простые, то существует натуральное n , что $a^n - 1$ делится на b .
9. Сколькими способами можно покрасить вершины правильного p -угольника в a цветов? (Способы, получающиеся друг из друга поворотами, считаем одинаковыми.)

¹На следующем занятии будет тотальный разбор первых трёх листиков, подведение промежуточных итогов непрерывной олимпиады, а также мини-лекция.

Кружок в Хамовниках. 7 класс. 03.10.2015
Непрерывная олимпиада — 4

Определение. *Эйлеровым циклом* называется цикл, содержащий все рёбра графа (ровно по одному разу). *Эйлеровым путём* называется путь, содержащий все рёбра графа.

1. а) Докажите, что в связном графе существует Эйлеров цикл тогда и только тогда, когда степени всех вершин данного графа чётны; б) докажите, что в связном графе существует Эйлеров путь тогда и только тогда, когда в данном графе есть не более двух вершин нечётной степени.

2. Можно ли увезти из каменоломни 50 камней, массы которых 370 кг, 372 кг, 374 кг, ..., 468 кг (арифметическая прогрессия с разностью 2 кг), на семи трёхтонках?

3. В классе 20 человек. Докажите, что способов выбрать чётное число из них столько же, сколько способов выбрать нечётное число из них.

4. На какое целое число надо умножить 999 999 999, чтобы получить число, состоящее из одних единиц?

5. Число 21982145917308330487013369 — точная тринадцатая степень натурального числа. Найдите это число.