Серия 3. Комбинаторный винегрет.

1. В пещере живёт 1001-головая гидра. Гидра считается побеждённой, если в некоторый момент времени у неё отсутствуют все головы. Геракл за один раз может срубить 10 или 7 голов. Если он срубит 10, тогда у гидры вырастет 7 новых, а если 7, то 16 новых голов. Сможет ли Геракл победить гидру?

2. Фирма “Id Software” плодит монстров. Каждый день монстры мутируют. Если сегодня монстр имеет m ручек и n ножек, то завтра он будет иметь $2m - n$ ручек и $2n - m$ ножек. Монстр погибает, когда число ручек или ножек становится отрицательным. При каком начальном количестве ручек и ножек монстр сможет жить вечно?

3. Белка прятала орехи. Известно, что от каждого тайника к следующему она пробегала не больше 3 м. Оказалось, что расстояние от первого тайника до последнего равно 100 м. Докажите, что найдутся два тайника, расстояние между которыми не меньше 22 метров и не больше 25 метров.

4. Есть куча из n камней. Разрешается заменить кучу на любое количество куч с меньшим количеством камней (возможно, различным в различных кучах). Докажите, что наступит момент, когда уже нельзя сделать ни одной такой операции.

5. В ряд выложены 200 шаров, из них 100 черных и 100 красных, причем первый и последний шары — черные. Докажите, что можно убрать с правого края несколько шаров подряд так, чтобы красных и черных шаров осталось поровну.

6. В квадрате 8×8 угловая клетка закрашена в черный цвет. За ход разрешается выбрать любой прямоугольник 1×4 и перекрасить все его клетки. Можно ли при помощи таких операций получить полностью закрашенный квадрат?

7. Восемнадцать школьников стоят по кругу, и на каждом из них сидит оса. Время от времени какие-то две осы перелетают на соседних ребят - одна по часовой стрелке, а другая - против. Могут ли все осы собраться на одном несчастном?

б) а что если школьников шестнадцать?

8. Вася отметил на плоскости 100 точек. Обязательно ли Петя сможет провести окружность так, чтобы ровно 50 точек было внутри круга?

9. На доске написаны числа 4,5,9. Разрешается стереть два числа a и b и записать вместо них числа а) $\frac{3a+b}{4}$ и $\frac{3b+a}{4}$; б) $\frac{a^2}{b}$ и $\frac{b^2}{a}$. Можно ли в результате таких операци получить числа 6, 7, 8?

10. За один ход можно заменить упорядоченную тройку целых чисел (p, q, r) на тройку $(r+5q, 3r-5p, 2q-3p)$. Существует ли целое число k, для которого из тройки $(1, 6, 7)$ можно за конечное число шагов получить тройку $(k, k+1, k+2)$?

Непрерывная математическая олимпиада кружка

1. В клетках квадратной таблицы 5×5 расставлены числа 1 и –1. Известно, что строк с положительной суммой больше, чем с отрицательной. Какое наибольшее количество столбцов этой таблицы может оказаться с отрицательной суммой?

2. В 12.00 из пункта А в далекий пункт Б выехал автомобиль "Москвич"со скоростью 80 км/ч. В 13.00 вслед за ним выехали "Жигули"со скоростью 120 км/ч, а в 14.00 вслед за ними выехала "Волга"со скоростью 120 км/ч. Когда одна из этих трех машин будет ровно посередине между двумя другими? Найдите все возможные ответы и докажите, что других нет.

3. У семи натуральных чисел посчитали всевозможные попарные произведения. Докажите, что какие-то два из этих произведений дают одинаковые остатки при деления на 25.

4. Назовём город Б *большим северным*, если он для другого города А город Б либо больше или севернее, чем А. Назовём город Б *малым южным*, если для любого другого города А город Б меньше или южнее, чем А. В стране все города, кроме города Спокойный, являются одновременно и малыми юэными и большими северными. Докажите, что это же можно сказать и про город Спокойный.

5. Есть таблица 8×8 и карточки с числами от 1 до 64. Двое игроков по очереди кладут по одной карточке на свободные клетки таблицы. Когда все карточки разложены, игроки отмечают в каждом столбце наименьшее число и находят сумму всех отмеченных чисел. Если эта сумма четна — выигрывает первый игрок, а если нечетна — второй. Кто выиграет при правильной игре?